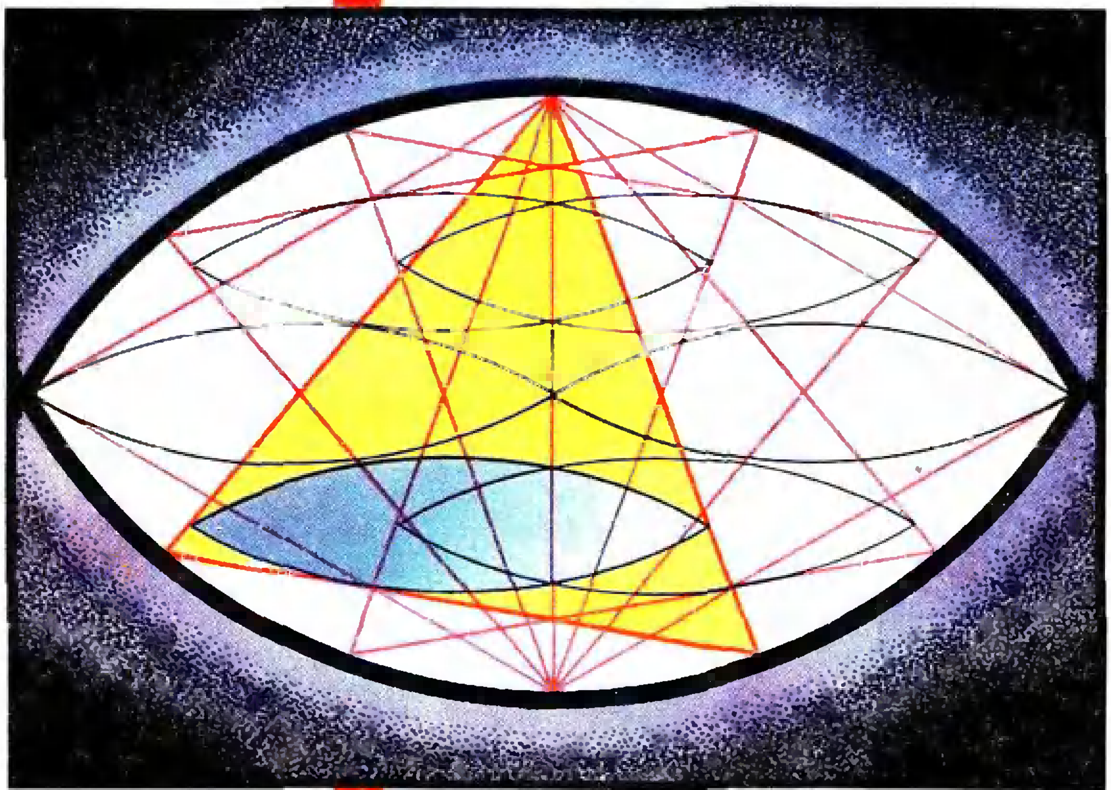
Квант

ISSN 0130-2221

Научно-популярный физико-математический журнал

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12



Треугольник в «Калейдоскопе»

1991

Квант

5 1991

Выходит с января 1970 года

Ежемесячный научно-популярный физико-математический журнал

Учредители — Президиум Академии наук СССР, Президиум Академии педагогических наук СССР и трудовой коллектив редакции журнала «Квант»

Москва, «Наука», Главная редакция физико-математической литературы

В номере:

К 70-летию со дня рождения А. Д. Сахарова

Предлагаем вашему вниманию одну из научно-популярных статей академика А. Д. Сахарова. Она написана в 1968 году по просьбе редакции журнала «Физика в школе». Статья перепечатывается с небольшими сокращениями. Прокомментировать статью с сегодняшних позиций мы попросили члена-корреспондента АН СССР Д. А. Киржница. Публикацию подготовила Н. Морозова. Фото В. Егудина.

СУЩЕСТВУЕТ ЛИ ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ДЛИНА?

А. САХАРОВ

От физики элементарных частиц ученые во всем мире ждут очень важных результатов практического и общефилософского значения, быть может, даже уточнения основных понятий о пространстве, времени и причинности. Таких изменений основных принципов нет оснований ожидать во всех остальных отраслях физики, в которых атомные частицы (электроны, фотоны, ядра) можно рассматривать как заданные. В биофизике, физике молекул и кристаллов, оптике и в большинстве других отраслей физики основные принципы квантовой механики, статистической физики и теории относительности дают твердую надежно проверенную базу для теоретического описания и объяснения наблюдаемых явлений, для новых предсказаний, открытий и практических применений (подобных транзистору, лазеру, электролюминесценции, парамагнитному резонансу, эффекту Мёссбауэра, голографии и т. д.). И мы уверены, что любое явление в этих отраслях может получить исчерпывающее описание на основе известных принципов, быть может, правда, с привлечением более мощных математических средств и новых экспериментальных данных (как это имеет место, например, в последние годы для явлений сверхтекучести и сверхпроводимости).

Но как только физики пытаются объяснить природу массы, заряда и другие свойства самих элементарных частиц, их взаимопревращения и взаимодействия, возникает впечатление, что в этой области физики известных сейчас основных принципов недостаточно. Экспериментальные исследования с помощью ускорителей элементарных частиц и с использованием «природных ускорителей» — космических лучей — непрерывно преподносят неожиданности. Только за последние 10 лет открыты десятки новых элементарных частиц с очень причудливыми свойствами, в том числе установлено существование двух «сортов» нейтрино («электронной породы» и «мюонной породы»), а также открыты нарушения симметрии законов природы при зеркальном отражении, при превращении частиц в античастицы и при обращении направлений течения физических процессов.

Последнее нарушение симметрии особенно удивительно; оно до сих пор не имеет даже феноменологического описания.

Автор только с некоторой натяжкой может считать себя специалистом по физике элементарных частиц. Тем не менее он отваживается здесь на обсуждение одной из основных проблем в этой области — так называемой проблемы элементарной длины. Речь идет о предполагаемом существовании принципиальной границы применимости основных идей современной науки о пространстве и причинности (т. е. теории относительности и квантовой теорий), о необходимости описывать «мелкомасштабные» явления, лежащие за этой гранью, с помощью каких-то новых, еще более абстрактных и глубоких физических идей и математических методов.

В этой статье не будет рассказа о каких-либо новых удивительных открытиях. Основное утверждение, содержащееся в статье, носит в основном негативный характер. Тем не менее автору представляется, что в вопросе о принципиальных основах науки (причем таких незыблемых до сих пор, как понятие длины и интервала времени) любое продвижение вперед и любое уточнение нюансов должно представить интерес не только для специалистов. Поэтому, несмотря на неясность ситуации, автор решил в этой статье рассказать о мучительной драме идей в одном из уголков современной теоретической физики так, как она ему представляется.

Еще до создания квантовой теории, при попытке описания электрона как точечной частицы возникла трудность при вычислении электростатической энергии точечного электрона. Напомню, что электростатическая энергия заряженного с поверхности шарика равна $W=e^2/2r$, где e — заряд, а r — радиус. Вообще же при произвольном распределении плотности заряда по радиусу имеем W порядка e^2/r. Для точечного электрона $r\to 0$ и $W\to\infty$. По соотношению Эйнштейна, энергии W сопоставляется масса покоя $m = W/c^2$, т. е. масса точечного электрона должна быть бесконечна. Если положить $m=e^2/rc^2$ и подставить в качестве m наблюдаемую на опыте массу электрона, то найдем $r=2{,}8\times 10^{-13}$ см. Так определенная величина r называется «классическим радиусом электрона».

С возникновением квантовой теории положение осложнилось еще больше. С одной стороны, формулы для электромагнитной энергии электрона при учете квантовой теории изменяются и приводят к гораздо меньшим численным значениям ее при тех же значениях r. По-прежнему остается трудность $W\to\infty$ при $r\to 0$, но W пропорционально не r^{-1}, а $\ln(r^{-1})$. С другой стороны, принципиальные трудности рассмотрения электрона как точечной частицы распространяются на другие основные вычисляемые в теории величины — на силу взаимодействия частиц, на вероятность процессов рассеяния и распадов и т. п. Вместе с тем понятие неточечной частицы очень трудно согласовать с принципами теории относительности — ведь по твердому телу протяженной частицы мы смогли бы передавать сигнал со скоростью, большей скорости света.

Возникло предположение, что квантовая теория элементарных частиц логически и математически не полна. Особенно ясно сформулировал (в 30-х годах) это предположение один из создателей квантовой механики выдающийся немецкий физик-теоретик Вернер Гейзенберг. Ход его мысли сводился к следующему. Трудности теории элементарных частиц, по его мнению, носят глубоко принципиальный характер, столь же затрагивающие основные принципы, как трудности теории электромагнитных явлений в движущихся телах до создания теории относительности и как трудности теории атомных явлений до создания квантовой теории.

Трудности электродинамики не могли быть преодолены без пересмотра и уточнения такого казавшегося самоочевидным понятия, как одновременность. Новые формулы теории относительности — это уже вторичный продукт такого гносеологического пересмотра понятий. Трудности «корпускулярно-волнового дуализма» потребовали еще более глубоких идей — принципа дополнительности, статистической интерпретации волновой функции. По Гейзенбергу, трудности рассмотрения элементарных частиц как точечных, а также отсутствие в современной теории каких-либо критериев, определяющих численную величину масс и зарядов элементарных частиц,— это все симптомы неполноты и неточности самих понятий о пространстве, времени и причинности для «мелкомасштабных» явлений.

Гейзенберг обращает внимание на то, что теория относительности Эйнштейна отличается от представлений Галилея — Ньютона о пространстве — времени тем, что в ней введена абсолютная единица скорости, являющаяся в теории Эйнштейна максимальной скоростью распространения взаимодействий и численно равная скорости света в вакууме ($c=3\times10^{10}$ см/с). При скоростях, много меньших c, доэнштейновские представления правильно отображают действительность. Аналогично грань между квантовой и классической (в смысле «неквантовой») теориями определяется другой основной постоянной, имеющей размерность «энергия$\times$время»,— постоянной Планка $\hbar$, определяющей коэффициент пропорциональности между разностью энергий двух «квантовых уровней» и частотой квантового перехода (частотой «биений»):

$$E_1-E_2=\hbar\omega.$$

(При измерении ω в угловых единицах рад/с численное значение $\hbar=1{,}05\cdot10^{-27}$ эрг$\cdot$с; сам Планк измерял частоту $\nu=\omega/2\pi$ в с$^{-1}$ и соответственно определил постоянную $h=2\pi\hbar=6{,}6\cdot10^{-27}$ эрг$\cdot$с; определение и обозначение $\hbar$ предложено Дираком.)*)

Классические представления являются соответствующими действительности при изучении макроскопических процессов, например при исследовании испускания радиоволн антенной, когда испускаемая энергия W гораздо больше энергии одного кванта $\hbar\omega$, и совсем неприменимы при исследовании излучения одного фотона возбужденным атомом.

Гейзенберг обращает далее внимание на то, что трудности квантовой теории элементарных частиц возникают при анализе тех проблем, где существенна передача от одной частицы другой большого импульса или большой энергии, т. е. при очень тесных столкновениях частиц с очень малой длиной волны де Бройля. Поэтому Гейзенберг выдвигает тезис, что при некоторой элементарной длине l_0, которую он в первоначальном варианте своей гипотезы отождествил с «классическим радиусом электрона» $r=e^2/mc^2=2{,}8\cdot10^{-13}$ см (m — масса электрона), известные нам законы квантовой теории и теории относительности перестают быть справедливыми, необходимо введение новых понятий, еще более абстрактных, чем в этих теориях.

По Гейзенбергу, именно величина l_0 задает также характерный масштаб масс элементарных частиц. Приняв за единицу массы $\frac{h}{cl_0}=\frac{70\ \text{МэВ}}{c^2}$, мы получаем с хорошей степенью точности массы покоя частиц (таблица составлена по современному списку элементарных частиц):

μ-мезона $=3/2$
π-мезона $=2$
K-мезона $=7$
η-мезона $=8$

*) Физики, как правило, не пользуются известной вам системой — СИ, а предпочитают систему СГС (первые буквы основных единиц: сантиметр, грамм, секунда). В этой системе эрг — единица измерения энергии (1 эрг $=10^{-7}$ Дж); если какая-то величина измеряется в единицах, не имеющих специального названия, пишут: единица СГС. *(Примеч. ред.)*

протона и нейтрона $= 13{,}5$
Λ-гиперона $= 16$
Σ-гиперона $= 17$
Ξ-гиперона $= 19$
электрона $= 1/137$
фотона, нейтрино и гравитона $= 0$ и т. д.

Отвлекаясь несколько в сторону, заметим, что наличие в современной теории двух «естественных» единиц (размерности которых $[c] =$ длина/время и $[\hbar] =$ энергия$\times$время) приводит к тому, что из трех основных единиц, лежащих в основе любой системы единиц измерения (например, в случае СИ: м, с, кг), лишь одна (например, единица длины L) должна считаться произвольной. Единица времени может быть определена как $T = \frac{L}{c}$, и единица массы — как $M = \frac{\hbar}{Lc}$, единицей энергии будет служить величина $W = \frac{\hbar c}{L}$ и т. д. В работах по теоретической физике обычно принимают $\hbar = c = 1$, измеряя все величины в степенях длины; это очень упрощает формулы, из которых исчезают коэффициенты $\hbar$ и c. Импульс p, масса m и энергия W выражаются в обратных единицах длины, скажем, в см$^{-1}$. При этом релятивистские формулы для энергии и импульса имеют вид:

$$W = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}} = \sqrt{m^2+p^2},$$

$$p = \frac{mv}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Магнитный момент выражается в единицах длины или обратных единицах массы. Например, магнитный момент электрона (так называемый нормальный момент, или «магнетон Бора» — см. ниже) равен $e/2m$. Аналогично выражаются все остальные физические величины. Пользование этой «одноразмерной» системой единиц удобно, если в качестве единицы массы или длины выбирать величину, характерную для исследуемой проблемы. После этого отступления возвратимся к идеям Гейзенберга.

В то время, когда Гейзенберг выдвигал свои идеи, список элементарных частиц включал только электрон (и его античастицу — позитрон), протон, нейтрон и фотон. Сейчас список расширился до нескольких десятков частиц.

Добавились μ-мезон и нейтрино двух «сортов», которые вместе с электроном и соответствующими античастицами образуют семейство слабо взаимодействующих частиц, или лептонов. Открыт также ряд новых, сильно взаимодействующих частиц; те из них, которые обладают очень малым временем жизни, получили название частиц-резонансов (пример: η-мезон в приведенной выше таблице). Сильно взаимодействующие частицы, или адроны, распадаются на две большие группы — так называемые барионы, родственные по своим свойствам протону и нейтрону (долгоживущие барионы Λ, Σ, Ξ получили название гиперонов, см. в таблице), и так называемые мезоны, типичными представителями которых являются ответственные за ядерные силы π-мезоны и ρ-мезоны, а также приведенные в таблице K- и η-мезоны.

Сейчас уже нет оснований предполагать, что массы всех тех частиц, которые существуют в природе, обязательно порядка $1/l_0 = 70$ МэВ (положив $\hbar = c = 1$, мы используем здесь 1 МэВ в качестве единицы не только энергии, но и массы, импульса и обратной длины). Например, есть все основания предполагать, что существуют частицы (вероятно, не стабильные) с гораздо большими массами. Таким образом, этот «эмпирический» аргумент в пользу принятого Гейзенбергом численного значения величины элементарной длины сейчас вряд ли убедителен. Не убедителен также аргумент, связанный с классической оценкой электромагнитной массы, в силу упомянутого нами выше уменьшения этой величины в квантовой теории. Это обстоятельство представляется нам особенно существенным.

Гейзенберг предполагал, что в законах взаимодействия элементарных частиц при энергиях, больших чем $1/l_0 = 70$ МэВ, должны наблюдаться разительные отклонения от современной теории. На первых порах, когда в космических лучах были открыты частицы с большой проникающей способностью, возникло предположение, что это электроны, которые обладают высокой энергией и поэтому «не подчиняются» квантовой электродинамике. Но вскоре оказалось, что это просто частицы с массой в 200 раз большей (их назвали μ-мезонами), и именно это «тривиальное» обстоятельство объясняет их проникающую способность. Сейчас не известно никаких явлений, которые можно было бы с уверенностью интерпретировать как явное нарушение современной теории. Остановимся на этом важном обстоятельстве подробней.

В современной физике известно 4 типа взаимодействий:

1. «Сильные» взаимодействия, типичным примером которых являются ядерные силы.
2. Электромагнитные взаимодействия.
3. «Слабые» взаимодействия, ответственные за процессы β-распада.
4. Гравитационные взаимодействия.

Наиболее полная количественная теория и наиболее полные экспериментальные данные существуют для электромагнитных взаимодействий, поэтому именно здесь имеется самое подходящее поле для попыток обнаружить отклонения от современной теории. До сих пор все такие попытки дали отрицательный результат. Мы опишем некоторые из них, так как в таком важном вопросе даже и негативный результат представляется очень важным; анализ точности экспериментов дает оценку для возможной грани справедливости современных представлений. Вместе с тем этот вопрос имеет многообразные связи с другими разделами современной физики и представляет самостоятельный интерес.

На сегодня самым изученным из электромагнитных свойств элементарных частиц является магнитный момент. По предположению, высказанному в 1925 году Уленбеком и Гаудсмитом, электрон подобен маленькому волчку — обладает механическим моментом вращения, численно равным 1/2 (в единицах $\hbar$), и, кроме того, обладает магнитным дипольным моментом, равным $e/2m$. Это предположение получило многочисленные подтверждения в спектроскопии и при изучении магнитных явлений. В дальнейшем выдающийся английский физик Дирак показал, что предположение Уленбека и Гаудсмита совместимо с описанием электрона как точечной заряженной частицы, подчиняющейся уравнениям теории относительности и квантовой теории.

Однако в 30-е годы оказалось, что магнитный момент протона в 2,9 раза больше, чем $e/2m_p$, где m_p — масса протона. Более того, советские теоретики Тамм и Альтшулер предсказали, а американский ученый Альварец обнаружил на опыте наличие магнитного момента у нейтрона, который электрически нейтрален и, согласно приведенной формуле, должен быть лишен магнитного момента. Сейчас принято величину $\mu_0=e/2m$ называть нормальным магнитным моментом, а все, что сверх этого,— аномальным. Аномальный момент у протона и нейтрона обусловлен по современным представлениям их внутренней структурой, однако теория этого эффекта отсутствует, как, впрочем, вообще теория сильно взаимодействующих частиц.

До 1947 года считалось, что у электрона нет аномального момента. Однако изучение энергии взаимодействия магнитного момента электрона с магнитным моментом протона*) привело к определенным неувязкам; поэтому американский теоретик Брейт предположил, а вскоре американские экспериментаторы Каш и Фолли обнаружили на опыте наличие у электрона очень малого аномального магнитного момента. Относительная величина аномального момента $\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}=a$ составляет около $1{,}2\cdot10^{-3}$. Теория аномального магнитного момента была создана выдающимся амери-

*) Эта энергия ответственна за излучение линии с длиной волны $\lambda=21$ см космическим атомарным водородом; как известно, в развитии радиоастрономии исследования излучения с этой длиной волны играют важную роль.

канским ученым Швингером в 1948 году в результате достигнутых в те годы им (а также независимо Томонагой, Гансом Бете, которому в этом году присвоена Нобелевская премия за теорию энергии звезд, Крамерсом, Фейнманом, Дайсоном и другими) крупных успехов в усовершенствовании математического аппарата квантовой электродинамики.

Согласно Швингеру, величина относительного аномального момента

$$a=\frac{\mu-\mu_0}{\mu_0}=\frac{e^2}{2\pi}=\frac{1}{2\pi\cdot 137{,}03}=1{,}16\cdot 10^{-3}$$

и обусловлена взаимодействием электрона или μ-мезона с электромагнитными квантовыми флуктуациями (нулевыми колебаниями) вакуума.

В квантовой теории поля вакуум — это не просто пустота. Как известно, квантовая теория вводит для каждой системы понятие об энергетических уровнях (гипотеза Бора). Распространение этой идеи на вакуум дает интерпретацию фотона как возбужденного состояния одной из электромагнитных колебательных степеней свободы вакуума. Основное состояние каждой степени свободы соответствует отсутствию фотона с данной длиной волны, при этом среднее квантово-механическое значение электрического поля в каждый момент времени равно нулю, однако поле есть, так как амплитуда поля, соответствующая данной степени свободы, не может тождественно обращаться в нуль и испытывает квантовые нулевые колебания (квантовые флуктуации), образуя «облако вероятности», около среднего (равновесного) значения. Полная энергия взаимодействия заряженной частицы с нулевыми колебаниями вакуума слагается из взаимодействия с нулевыми колебаниями различных длин волны, изменение этой энергии при наличии «внешнего» магнитного поля интерпретируется по Швингеру как обусловленное аномальным магнитным моментом.

Энергия взаимодействия электрона с нулевыми колебаниями вакуума может быть представлена интегралом по возможным значениям импульса p (обратной длины волны) этих колебаний (p_0 — предполагаемая граница существующих представлений) и пропорциональна

$$m_{\text{эл}}\sim e^2\int\limits_0^{p_0} dp\,\frac{m}{\sqrt{p^2+m^2}}\approx$$

$$\approx\int\limits_m^{p_0} e^2 m\,\frac{dp}{p}=me^2\ln\frac{p_0}{m}.$$

При наличии магнитного поля H*) подынтегральное выражение изменяется на величину, пропорциональную e^3H/p^2 (по соображениям размерности). Отсюда изменение энергии электрона в магнитном поле, которое мы в согласии с идеей Швингера приравниваем $\mu-\mu_0$, пропорционально $me^3H\int\limits_m^{p_0}\frac{dp}{p^3}$. Таким образом,

$$\mu-\mu_0\sim me^3\left(\frac{1}{m^2}-\frac{1}{p_0^2}\right)$$

(множитель пропорциональности, по Швингеру, равен $1/4\pi$).

В приведенной выше формуле Швингера

$$\mu-\mu_0=\frac{e^2}{2\pi}\mu_0=\frac{e^3}{4\pi m},$$

т. е. опущен множитель $1-\frac{m^2}{p_0^2}$, что соответствует $p_0\to\infty$.

При $p_0\neq\infty$ имеем поправки к аномальному моменту, пропорциональные m^2/p_0^2. Обозначая через $a_{\text{теор}}$ теоретическое значение, вычисленное Швингером и другими теоретиками, которые уточнили его оценку в рамках современной теории, имеем по порядку величины

$$\delta=\frac{a-a_{\text{теор}}}{a_{\text{теор}}}\approx\frac{m^2}{p_0^2},$$

или

$$p_0=\frac{m}{\sqrt{\delta}}.$$

Из этой формулы видно, что наиболее «перспективным» объектом для

*) H — напряженность магнитного поля. (*Примеч. ред.*)

изучения отклонений от квантовой электродинамики является самая тяжелая из известных сейчас частиц, аномальный момент которых носит флуктуационный характер, а именно μ-мезон (замечание советского физика Берестецкого).

Первоначальные эксперименты, приведшие к обнаружению аномального момента у электрона, были проведены методом молекулярных пучков. Создание этого метода, восходящего еще к классическому опыту Штерна — Герлаха,— в значительной мере заслуга американского физика Раби. Однако наиболее точные определения величины a (с относительной точностью $\delta=2\cdot10^{-5}$ для электрона и $\delta=4\cdot10^{-3}$ для μ-мезона) были выполнены много поздней в ряде американских лабораторий по другому методу.

В этих опытах было найдено, что $a=1{,}162\cdot10^{-3}\pm0{,}004\cdot10^{-3}$ (результаты приведены для μ^+-мезонов, аналогичные результаты найдены Фарли и Брауном для μ^--мезонов). Теоретическое значение $a_{\text{теор}}$ со всеми известными поправками равно $1{,}1654\cdot10^{-3}$, т. е. совпадает с экспериментальной величиной в пределах ошибок измерения.

Значит, величина $\delta=\frac{a-a_{\text{теор}}}{a_{\text{теор}}}$, определенная выше, безусловно меньше, чем $4\cdot10^{-3}$. Таким образом, квантовая электродинамика безусловно справедлива для энергий и импульсов, меньших чем $p_0=\frac{m}{\sqrt{4\cdot10^{-3}}}$, т. е. для энергий и импульсов, меньших нескольких ГэВ.

Другой метод проверки квантовой электродинамики сводится к изучению столкновений электронов с электронами и электронов с позитронами в так называемых встречных пучках. Почему нужны именно встречные пучки? Теория относительности объединяет вектор импульса $\vec{p}$ и энергию частицы W в так называемый четырехмерный вектор. Трехмерные векторы обладают тем свойством, что их скалярное произведение $(\vec{a}\vec{b})$ сохраняется при вращениях трехмерных координатных осей. Однако при более общих «лоренцевских» преобразованиях системы отсчета, учитывающих возможность не только поворота осей, но и перехода к другой инерциальной системе, инвариантом является лишь более общая величина — четырехмерное скалярное произведение Эйнштейна — Минковского. Для двух сталкивающихся частиц четырехмерное скалярное произведение векторов энергии — импульса имеет вид

$$I=W_1W_2-p_{1x}p_{2x}-p_{1y}p_{2y}-p_{1z}p_{2z}.$$

Очевидно, что все качественные утверждения теории, в частности эффекты отклонения от современной теории, могут зависеть лишь от инвариантной величины. Находим, что при столкновении покоящегося электрона ($p_1=0$) с электроном, имеющим импульс $p_2=\vec{p}$,

$$I_1=m\sqrt{m^2+p^2},$$

а в случае встречных пучков электронов с импульсами $\vec{p}_1=\vec{p}$ и $\vec{p}_2=-\vec{p}$

$$I_2=m^2+2p^2,$$

Если $p=10^3\ m$ (энергия 500 МэВ), то $I_2=2\cdot10^3\ I_1$. Из сравнения этих значений I_1 и I_2 ясно преимущество встречных пучков.

Опыты со встречными пучками в Советском Союзе проводятся в Новосибирске под руководством Г. И. Будкера и являются весьма перспективными. В этих опытах тоже (в пределах точности эксперимента) не обнаружено отклонения от современной теории.

Итак, совокупность теоретических и экспериментальных аргументов заставляет признать, что предложенная Гейзенбергом граница теории $l_0=r$ должна быть отодвинута в сторону гораздо более высоких энергий. Этот результат, хотя и негативный, представляется очень важным для современной физики элементарных частиц.

Еще очень давно американский физик Вигнер обратил внимание на то, что само понятие измерения очень малых интервалов длины и времени

($\Delta x \lesssim L_0 = 10^{-33}$ см, $\Delta t \lesssim \frac{L_0}{c} = 10^{-44}$ с) встречает принципиальные трудности, если учитывать гравитационные явления и одновременно эффекты квантовой теории.

Расстояние и интервал времени между любыми двумя точками пространства Эйнштейна — Минковского (т. е. между двумя «событиями») должны испытывать квантовые флуктуации, нулевые квантовые колебания, как и все иные физические величины. В этом отношении гравитационное поле не может качественно отличаться от электромагнитного и любого другого. Заметим, что оценка величины L_0 может быть получена из соображений размерности. В свое время М. Планк указал, что с использованием численного значения гравитационной постоянной $G = 6{,}67 \times 10^{-8}$ ед. СГС, постоянных $\hbar$ и c можно построить систему «естественных» единиц для всех величин (т. е. от «одноразмерной» системы единиц, описанной выше, перейти к «нульразмерной» системе единиц). А именно, единицу длины L_0 можно определить, как

$$L_0 = G^{1/2}\hbar^{1/2}c^{-1/2} = 1{,}61 \cdot 10^{-33} \text{ см}.$$

Соответственно единица времени

$$T_0 = \frac{L_0}{c} = G^{1/2}\hbar^{1/2}c^{-3/2} = 5{,}35 \cdot 10^{-44} \text{ с},$$

единица энергии

$$W_0 = \frac{\hbar}{T_0} = G^{-1/2}\hbar^{1/2}c^{3/2} = 2 \cdot 10^{16} \text{ эрг} = 10^{28} \text{ эВ},$$

единица массы

$$M_0 = \frac{W_0}{c^2} = G^{-1/2}\hbar^{1/2}c^{-1/2} = 2{,}18 \cdot 10^{-5} \text{ г}.$$

Вигнеровские соображения, о которых мы упоминали, как раз и приводят к выделению величин L_0, T_0 как граней представлений о пространстве и времени. Ряд ученых, в том числе советский ученый А. С. Компанеец, указали, что принятие величины L_0 в качестве эффективного радиуса электрона в квантовой электродинамике не приводит к слишком большой величине электромагнитной массы (как это было бы в классической электродинамике), если использовать получающуюся в квантовой электродинамике пропорциональность электромагнитной массы величине $\ln(r^{-1})$.

Недавно другой советский ученый, М. А. Марков, высказал гипотезу, что величина L_0 (и связанная с ней величина $M_0 = \frac{1}{L_0}$) определяет также максимальную возможную массу элементарных частиц: соответствующие частицы он назвал «максимонами». Как известно, при образовании стабильных частиц из составных частей, которые могут быть сами нестабильными, происходит уменьшение суммарной массы («дефект» массы в виде малой поправки к закону Проута, проявляющейся в ядерной физике). Поэтому нас, по Маркову, не должно удивлять, что наблюдаемые стабильные частицы (электроны, протоны и др.) гораздо меньше по массе, чем «естественная» единица массы $M_0 \approx 2 \cdot 10^{-5}$ г.

Сейчас все больше физиков склоняются к тому, что именно грань L_0 определит наиболее существенные перемены в наших представлениях.

Все же очень важно убедиться, что никакая промежуточная между $r = 2{,}8 \cdot 10^{-13}$ см и $L_0 = 1{,}61 \cdot 10^{-33}$ см характерная длина не играет столь же фундаментальной роли. Здесь есть пока только весьма косвенные теоретические аргументы. Вот один из таких аргументов. Он относится к анализу основ общей теории относительности.

Как известно, движение материальных тел в поле тяготения описывается в теории Эйнштейна как движение по кратчайшей линии в «искривленном» пространстве — времени. «Искривление» пространства — времени приводит к тому, что кратчайшей длиной обладают не «прямые», а «кривые» линии пространства — времени вида

$$x = f_1(t),\ y = f_2(t),\ z = f_3(t),$$

где f_1, f_2, f_3 не есть линейные функции.

В теории Эйнштейна величина искривления пространства находится из условия, которое качественно можно описать так. В окрестностях тел, обладающих массой (или, что то же самое, энергией), на пространство действует искривляющая «сила» (конечно, слово «сила» здесь используется в некотором обобщенном смысле). В то же время пространство обладает свойством «упругости», оно как бы препятствует своему искривлению. Равновесие этих двух «сил» определяет истинную степень кривизны. Обычно отклонения свойств пространства от свойств, описываемых геометрией Эвклида, очень малы, т. е. «упругость» пространства очень велика.

Чем же определяется «упругость» вакуума? Можно предполагать, что изменением квантовых флуктуаций вакуума. Мы уже говорили о флуктуациях вакуума в связи со швингеровской теорией аномального магнитного момента. Так вот, при искривлении пространства — времени этим флуктуациям становится «более тесно», они как бы «выходят из берегов», что приводит к увеличению энергии вакуума. Формально этот эффект бесконечен, если учитывать самые «коротковолновые» флуктуации. Величина гравитационной постоянной, обратно пропорциональная «коэффициенту упругости пространства», имеет правильное численное значение, если ограничиться флуктуациями с длиной волны λ больше, чем $L_0 \sim 10^{-33}$ см. Будущее покажет, правильно ли это.

Ну, а что за гранью L_0? Какие изменения следует внести в теорию (и следует ли вносить вообще!) для описания процессов на расстояниях, меньших чем 10^{-33} см, и при энергиях частиц, больших чем 10^{28} эВ? Этого пока никто не знает. Вероятно, нужно согласиться с теми, кто предполагает, что следует ожидать глубоко принципиальных изменений. Энергия 10^{28} эВ настолько далека от реально изучаемого сейчас диапазона (энергия Серпуховского ускорителя $7 \cdot 10^{10}$ эВ), что окончательное выяснение этого комплекса проблем может оказаться делом не очень близкого будущего.

Наш комментарий

После публикации этой статьи прошло без малого четверть века. Казалось бы, срок достаточный, чтобы успели устареть и обесцениться любые прогнозы, относящиеся к переднему краю науки, тем более, что именно прошедшие годы ознаменовались бурным прогрессом физики элементарных частиц. Тем примечательнее, что многое в статье Сахарова не потеряло значения и сегодня, а сама она продолжает вызывать интерес, выходящий за рамки чисто исторического.

В тот самый год, когда Андрей Дмитриевич готовил статью к печати, появились работы будущих нобелевских лауреатов по физике С. Вайнберга и А. Салама, которые вместе с третьим лауреатом Ш. Глэшоу заложили основы стратегии объединения четырех видов фундаментальных взаимодействий природы. Это привело не только к прорыву в понимании физики микромира, но и к исчезновению ряда возникающих трудностей в старой теории. Так, бесконечности, появляющейся при вычислении физических величин (с ними Сахаров связывает главный, по существу, аргумент в пользу необходимости ревизии наших представлений о микромире), теперь либо легко исключаются, либо, в некоторых вариантах теории, не возникают вовсе.

Очень важно добавить, что физика элементарных частиц обошлась без третьей (после создания теории относительности и квантовой теории) революции, которая, как ожидали многие, должна была привести к коренной ломке наших представлений о пространстве — времени, причинности и т. д. Выход из кризиса лежал скорее на реформистском пути — пути перехода от примитивных и ограниченных старых к более сложным и богатым содержанием новым моделям частиц и их взаимодействий. Поэтому предположение Гейзенберга, которое обсуждает Сахаров, не оправдалось. Прогресс теории элементарных частиц, хотя и привел к революционным последствиям, ее глубинных основ не потряс, тем самым еще раз подтвердился шутливый афоризм Эйнштейна «Господь изощрен, но не злонамерен».

На первый взгляд, из сказанного следует, что ответ на вынесенный в заголовок статьи вопрос должен быть отрицательным, что самой проблемы элементарной длины как границы применимости наших фундаментальных представлений уже не существует и что содержание статьи Сахарова безнадежно устарело. Однако в действительности подобное заключение было бы слишком поспешным.

Прежде всего, оказалось, что уже в рамках сегодняшней теории элементарных частиц пространственно — временна́я картина испытывает достаточно радикальные (хотя и не столь революционные, как думал Гейзенберг) изменения на масштабах порядка планковской длины волны $L_0 = 10^{-33}$ см: проявляются скрытые на бо́льших масштабах измерения пространства, входят в игру квантовые флуктуации координат и времени и т. п. Поэтому, определяя элементарную длину, как границу коренного изменения наших пространственно — временны́х представлений (и не вкладывая в это понятие прежнего экстремистского смысла), следует считать эту величину равной L_0. Развитие науки подтвердило, таким образом, слова Сахарова: «...именно грань L_0 определит наиболее существенные перемены в наших представлениях».

Более того, современная теория при всех ее успехах далеко еще не прошла опытной проверки; ее корни лежат на масштабах L_0, а в прямом эксперименте изучена лишь область длин, бо́льших $l = 10^{-17}$ см. Не исключено (и об этом также говорит Сахаров), что на масштабах, меньших l_0, но бо́льших L_0, опыт выявит новые, неожиданные явления, чем и определится истинное значение элементарной длины. Поэтому обсуждаемые Сахаровым опыты по определению этой величины (или ее верхней границы) не потеряли своего значения и, несомненно, будут продолжаться.

Итак, прогресс теории элементарных частиц, хотя и существенно смягчил остроту проблемы элементарной длины, но вовсе не снял ее с повестки дня.

Из «любительских задач» А. Д. Сахарова

По словам людей, работавших с А. Д. Сахаровым, он любил задачи, которые возникают из простых жизненных наблюдений. Вот одна из них, которую вспомнил новосибирский физик И. Ф. Гинзбург.

1. А. Д. имел обыкновение пользоваться галошами. В пятидесятые годы он жил на два дома, регулярно летая из Москвы на объект, где он тогда работал*), и у него было три пары галош. Направляясь на самолет, А. Д. надевал галоши в двух случаях: если шел дождь или если в пункте назначения ни одной пары галош не было. Через некоторое время он обнаружил, что вероятность посадки в самолет в галошах составляет $q = 20\,\%$. Какова вероятность дождя p? (Считается, что вероятность p в Москве и на объекте одинакова.)

Вот еще несколько «любительских задач», включенных Андреем Дмитриевичем в обзор своих работ (подготовленный в 1980 году и опубликованный в США).

2. При рубке капусты сечкой получаются многоугольники с разным числом вершин, разного размера и формы. Определить среднее число вершин $\bar{n}$ многоугольников и отношение квадрата их среднего периметра $\bar{L}$ к средней площади $\bar{S}$.

Ответ: $\bar{n} = 4$; $\bar{L}^2/\bar{S} = 4\pi$ (то есть как у круга, что на первый взгляд удивительно). Задача возникла как результат того, что я рубил капусту, помогая жене делать пироги.

3. Среди членов ряда Фибоначчи $f_1 = f_2 = 1$, $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ есть члены, делящиеся на произвольное целое число m (кратные m). Рассмотреть обобщенный ряд Фибоначчи, в котором f_1 и f_2 — произвольные целые числа. Для каких m среди членов ряда есть кратные m?

4. На основании равенства $\lim \frac{a_n}{b_n} = \sqrt{\frac{a_n^2 - 1}{b_n}}$, где $a_n = 2a_{n-1}^2 - 1$, $b_n = 2a_{n-1}b_{n-1}$ построить быстро сходящийся алгоритм вычисления квадратных корней из целых и рациональных чисел и алгоритм вычисления членов f_{2n}, f_{2n+1} ряда Фибоначчи, если известны f_n, f_{n+1} (без вычисления всех промежуточных членов).

5. Дано N точек на плоскости. Каждая точка соединяется цветной линией с каждой из остальных $N-1$ точек, причем всего используется p цветов. Найти функцию $L(n;\, p)$ такую, что: (1) при $N > L\,(n, p)$ при любом выборе цветов (для всех $N(N-1)/2$ линий) найдется по крайней мере n точек таких, что все $n(n-1)/2$ соединяющих их линий одного цвета (здесь $n = 3, 4, \ldots$); (2) при $N < L(n;\, p)$ можно так выбрать цвета линий, что никакие n точек не соединены линиями одного цвета.

Задача решена лишь частично. По-видимому $L(3;\, p) \approx e \cdot p!$ (здесь $e = 2{,}718\ldots$, $p! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \times p$). Для этого случая доказана теорема (1) и на примере $p = 2$, $p = 3$ подтверждена теорема (2). Для $n > 3$ найдена $L' > L$ такая, что при $N > L'$ выполняется (1).

Следующая задача из этого списка, которую мы приведем в заключение, уже далеко не элементарна и на первый взгляд производит странное впечатление: любой знаток

*) О том, как и почему А. Д. Сахаров перестал ездить на объект, можно прочесть в его воспоминаниях («Знамя», 1991, № 1).

скажет, что строгие математические доказательства подобных утверждений не известны.

6. Сформулированы два семейства теорем, относящихся к теории чисел. 1) Последовательности $a_n = n! + 1$, $a_n = [n \ln n]! + 1$ и т. д. (здесь [] означает целую часть числа) содержат бесконечное число простых чисел, так как ряд $\Sigma(1/\ln a_n)$ расходится. 2) Последовательности $b_n = (n^2)! + 1$, $b_n = [n(\ln n)^a]! + 1$ и т. д., для которых ряды $\Sigma(1/\ln b_n)$ сходятся, содержат конечное число простых чисел.

Как эта задача могла возникнуть у А. Д. Сахарова?

Приведем комментарий члена редсовета нашего журнала академика В. И. Арнольда.

— Насколько я знаю, «теоремы» А. Д. не доказаны. Но на «физическом уровне строгости» они вытекают из «хаотичности» распределения простых чисел в натуральном ряду, теорем об асимптотике количества простых чисел и следующего хорошо известного факта теории вероятностей.

Лемма 1. Пусть независимые события 1, 2, ... имеют вероятности $p_1, p_2, \ldots$ Тогда вероятность того, что произойдет бесконечное число из этих событий, равна 1, если ряд $p_1 + p_2 + \ldots$ расходится, и равна 0, если этот ряд сходится.

Доказательство. Вероятность того, что ни одно из этих событий не произойдет, равна $p = (1 - p_1)(1 - p_2)\ldots$; вероятность, что произойдет одно i-е событие, равна pr_i, где $r_i = p_i/(1 - p_i)$. Вероятность того, что произойдут события с номерами $i, \ldots, j$ и только они, равна $pr_i \ldots r_j$. Если ряд расходится, то $p = 0$, для каждой комбинации конечного числа событий ее вероятность тоже равна 0. Поэтому вероятность того, что произойдет лишь конечное число событий, равна 0. Если же ряд сходится, то вероятность того, что произойдет лишь конечное число событий, равна

$$p(1 + \Sigma r + \Sigma r_i r_j + \ldots) = p(1 + r_1)(1 + r_2)\ldots = 1,$$

поскольку $1 + r_i = 1/(1 - p_i)$. Лемма доказана.

Применим «ничтоже сумняшеся» лемму 1 к «событиям» (конечно, отнюдь не случайным) «$n! + 1$ — простое число», $n = 1, 2, \ldots$ «Вероятностью» p_n такого события будем считать долю простых чисел на отрезке натурального ряда от 1 до $N = n! + 1$ (отношение количества простых чисел, меньших N, к N).

Лемма 2. Ряд из чисел p_n расходится.

Доказательство. Средняя плотность распределения простых чисел на отрезке от 1 до N убывает с ростом N обратно пропорционально $\ln N$ (теорема Адамара)*. $p_n \sim 1/(\ln N)$. Но $\ln(n! + 1) \sim \ln n! \sim n \ln n$ по формуле Стирлинга, а ряд $\Sigma 1/(n \ln n)$ расходится. Поэтому расходится и ряд Σp_n. Лемма 2 доказана.

Считая простоту чисел $n! + 1$ при разных n независимыми событиями (что бы это ни означало) и применяя (незаконно) лемму 1, заключаем, что «вероятность» того, что для бесконечного количества n число $n! + 1$ простое, равна 1, поскольку по лемме 2 ряд Σp_n расходится.

Это «физическое», т. е. не имеющее точно определенного смысла, рассуждение убеждает всякого разумного человека (только не математика), что последовательность $n! + 1$ действительно содержит бесконечно много простых чисел.

Для последовательности $n^2! + 1$ ряд из $p_n \sim 1/\ln(n^2!) \sim 1/(n^2 \ln^2 n)$ сходится. Поэтому вероятность бесконечности количества простых чисел вида $n^2! + 1$ равна 0 (что бы эта «вероятность», бессмысленная с точки зрения математика, ни означала). Разумный человек заключит, что множество простых чисел вида $n^2! + 1$ конечно.

Действительно, $4! + 1$ делится на 5, а $9! + 1$ делится на 19, поэтому я не знаю ни одного простого числа вида $n^2! + 1$, кроме $1! + 1 = 2$.

Числа же $n! + 1$, простые при $n = 1, 2, 3, 11$, при $n = 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10$ имеют нетривиальные делители (соответственно, 5, 11, 7, 71, 61, 19, 11).

* * *

В списке «любительских задач» А. Д. Сахарова наряду с математическими собраны и разнообразные задачи по физике, но для их понимания (не говоря уже о решении) элементарных знаний далеко не достаточно. Они будут включены в сборник (А. Д. Сахаров «Научные труды»), который подготовлен к изданию в ФИАНе коллегами Андрея Дмитриевича; в него войдут некоторые работы А. Д. Сахарова и воспоминания о нем.

* См. статью М. И. Башмакова «О постулате Бертрана» в «Кванте» № 5 за 1970 год. *(Примеч. ред.)*

СОВЕРШЕННЫЕ ЧИСЛА

И. ДЕПМАН

В 1961 году в журнале «Математическое просвещение» была напечатана заметка профессора И. Я. Депмана о совершенных числах, т. е. числах, равных сумме всех своих делителей. Мы публикуем переработку этой статьи, осуществленную специально для читателей нашего журнала академиком И. В. Петряновым-Соколовым. Добавления о совершенных числах, открытых в последнее время, написал профессор А. А. Бухштаб.

Никомах Герасский, славный грек, знаменитый философ и математик, писал: «Совершенные числа красивы. Но известно, что красивые вещи редки и немногочисленны, безобразные же встречаются в изобилии. Избыточными и недостаточными являются почти все числа, в то время как совершенных чисел немного».

Сколько же их? Никомах, живший в первом столетии нашей эры, этого не знал.

Первым прекрасным совершенным числом, о котором знали математики Древней Греции, было число «6». На шестом месте на званном пиру возлежал самый уважаемый, самый знаменитый и самый почетный гость. Особыми, мистическими свойствами обладало число 6 в учении пифагорейцев, к которым принадлежал и Никомах.

Много внимания уделяет этому числу великий Платон в своих «Диалогах». Недаром в библейских преданиях утверждается, что мир создан был в шесть дней, ведь более совершенного числа среди совершенных чисел, чем «6», нет, поскольку оно первое среди них.

Следующим совершенным числом, известным древним, было «28». В Риме в 1917 году при подземных работах было открыто странное сооружение: вокруг большого центрального зала были расположены двадцать восемь келий. Это было здание неопифагорейской академии наук. В ней было двадцать восемь членов. До последнего времени столько же членов, часто просто по обычаю, причины которого давным-давно забыты, полагалось иметь во многих ученых обществах.

Древних математиков удивляло особое свойство этих двух чисел: *каждое из них равно сумме всех своих собственных делителей:*

$$6=1+2+3,$$
$$28=1+2+4+7+14.$$

До Евклида были известны только эти два совершенных числа, и никто не знал, существуют ли другие совершенные числа и сколько таких чисел вообще может быть. Великий основатель геометрии много занимался изучением свойств чисел; конечно, его не могли не интересовать совершенные числа. Евклид доказал, что всякое число, которое может быть представлено в виде произведения множителей 2^{p-1} и 2^p-1, где 2^p-1 — простое число, является совершенным числом. Если в формулу Евклида $2^{p-1}\cdot(2^p-1)$ подставить $p=2$, то получим $2^{2-1}\times(2^2-1)=6$ — первое совершенное число, а если подставить в нее $p=3$, то получим второе совершенное число:

$$2^{3-1}\cdot(2^3-1)=28.$$

Благодаря своей формуле, Евклид сумел найти еще два совершенных числа: третье при $p=5$ и четвертое при $p=7$. Вот эти числа:

$$2^{5-1}\cdot(2^5-1)=2^4\cdot(2^5-1)=$$
$$=16\cdot31=496$$

и

$$2^{7-1}\cdot(2^7-1)=2^6\cdot(2^7-1)=$$
$$=64\cdot127=8128.$$

Проверьте, что они действительно равны сумме своих собственных делителей.

Почти полторы тысячи лет люди знали только четыре совершенных числа, и никто не знал, могут ли существовать еще числа, которые можно было бы представить в евклидовской форме, и никто не мог ска-

Пифагор (VI в. до н. э.). Портрет с фрески Рафаэля. Личность Пифагора уже в древности стала полулегендарной. Он основал математическую и философскую школы, и многие замечательные ученые Греции называли себя последователями Пифагора.

зать, возможны ли совершенные числа, не удовлетворяющие формуле Евклида.

Неразрешимая загадка совершенных чисел, бессилие разума перед их тайной, их непостижимость привели к признанию божественности этих удивительных чисел. Один из наиболее выдающихся ученых средневековья, друг и учитель Карла Великого, аббат Алкуин, один из виднейших деятелей просвещения, организатор школ и автор учебников по арифметике, был твердо убежден, что человеческий род только потому несовершенен, и в нем только потому царят зло, горе и насилие, что он произошел от восьми людей, спасшихся в ноевом ковчеге от потопа, а «8» — число несовершенное. Род людской до потопа был более совершенен — он происходил от одного Адама, а единица может быть причислена к совершенным числам: она равна самой себе — своему единственному делителю. Алкуин жил в восьмом веке. Но даже в двенадцатом веке церковь учила, что для спасения души вполне достаточно изучать совершенные числа, и тому, кто найдет новое божественное совершенное число, уготовано вечное блаженство.

Но и надежда на эту награду не смогла помочь математикам средневековья. Следующее, пятое совершенное число было обнаружено лишь в пятнадцатом веке. Оказалось, что и пятое совершенное число также подчиняется условию Евклида.

Не удивительно, что его так долго не могли найти. Гораздо более поражает то, что в пятнадцатом веке вообще смогли его обнаружить.

Пятое совершенное число равно

$$33\,550\,336,$$

ему соответствует значение $p=13$ в формуле Евклида.

Еще через двести лет француз Марин Мерсенн, математик и музыкант, один из основателей Парижской академии наук, друг Декарта и Ферма, без всяких доказательств заявил, что следующие шесть совершенных чисел должны иметь также евклидовскую форму со значениями p, равными 17, 19, 31, 67, 127, 257.

Платон (ок. 429 — 348 до н. э.). Портрет с фрески Рафаэля. Платон стоял в центре научной жизни своего времени. Он руководил научной работой многих выдающихся математиков.

Современникам Мерсенна было совершенно очевидно, что сам Мерсенн никак не мог проверить непосредственным вычислением свое утверждение, ведь для этого он должен был предварительно доказать, что числа 2^p-1 с указанными им значениями p являются действительно простыми.

Вычислить любое из них совсем нетрудно, но выяснить, простые все эти числа или нет,— это выходило далеко за пределы человеческих сил.

Так и осталось неизвестным, прав был Мерсенн или нет.

Но позднее было обнаружено, что веселый итальянец Катальди, бывший профессором математики во Флоренции и Болонье, который первый дал способ извлечения квадратных корней, тоже для спасения своей души занимался поисками совершенных чисел. В его записках были указаны значения шестого и седьмого совершенных чисел, найденные им почти за сотню лет до Мерсенна:

8 589 869 056 (шестое число),
137 438 691 328 (седьмое число).

Оказалось, что оба эти числа совпадают с теми, на которые указывал Мерсенн:

$$2^{16}\cdot(2^{17}-1) \text{ и } 2^{18}\cdot(2^{19}-1).$$

Но оставалось еще не доказанным, действительно ли эти числа являются совершенными; для этого необходимо, чтобы множители $2^{17}-1$ и $2^{19}-1$ были простыми.

Петербургский академик, основатель современной математики, непревзойденный вычислитель, друг Ломоносова, великий Леонард Эйлер сумел найти новую теорему о таинственных и загадочных совершенных числах. Он доказал, что все четные совершенные числа имеют вид, указанный Евклидом. Но какой вид должны иметь нечетные совершенные числа и могут ли они вообще существовать — осталось неизвестным и до нашего времени.

Эйлер доказал, что первые три числа из указанных Мерсенном: $2^{17}-1$, $2^{19}-1$ и $2^{31}-1$,— действительно являются простыми.

Шестое и седьмое совершенные числа, найденные Катальди, а позднее Мерсенном, оказались верными. И навсегда осталась в истории загадочная тайна, как они сумели найти их. До сих пор предложено только одно «объяснение» этой загадки — оно было дано еще их современниками: им помогало божественное провидение, оно подсказало своим избранникам верные значения двух совершенных чисел.

Рене Декарт (1596—1650). Выдающийся французский математик, физик, физиолог и философ. Считал математику образцом для всех других наук.

Таким образом, восьмое совершенное число, которому соответствует $p=31$ в формуле Евклида, равно

2 305 843 008 139 952 128.

Снова в течение целого столетия это число оставалось наибольшим из совершенных чисел, но за это время математикам удалось найти новый метод, с помощью которого можно установить, является ли число 2^p-1, где p — простое число, простым или нет, не производя прямых вычислений. Оказалось, что далеко не все предсказания Мерсенна были верны. Он правильно предсказал значение $p=127$, но числа со значениями $p=67$ и $p=257$, вопреки Мерсенну, не являются совершенными. Зато должны быть совершенными числа со значениями $p=61$, $p=89$ и $p=107$.

Девятое совершенное число было вычислено только в 1883 году. В нем

Пьер Ферма (1601—1665). Французский математик, по профессии юрист, математикой занимался «в свободное время». Наряду с Декартом является основателем аналитической геометрии. Один из создателей теории чисел; много занимался простыми числами. Среди наиболее интересных его результатов — малая теорема Ферма.

оказалось тридцать семь значащих цифр. Этот вычислительный подвиг совершил сельский священник из-под Перми Иван Михеевич Первушин. Он сумел вычислить для того времени самое большое простое число вида 2^p-1 при $p=61$:

$$2\,305\,843\,009\,213\,693\,951$$

и соответствующее ему совершенное число

$$2\,305\,843\,009\,213\,693\,951\cdot 2^{60}.$$

И. М. Первушин, вычислив девятое совершенное число, поистине совершил настоящий подвиг. Мерсенн в свое время говорил, что вечности не хватит для проверки простоты числа, имеющего 15—20 десятичных знаков. Первушин считал, по существу, так же — без всяких вычислительных приборов. В его же числе оказалось тридцать семь цифр.

В начале двадцатого столетия появились первые механические счетные машины. Их появление ускорило поиски новых совершенных чисел.

Десятое было найдено в 1911 году, в нем оказалось 54 цифры:

$$618\,970\,019\,642\,690\,137\,449\,562\,111\times 2^{88}.$$

Одиннадцатое, имеющее 65 цифр, открыли в 1914 году:

$$162\,259\,276\,829\,213\,363\,391\,578\,010\,288\,127\times 2^{106}.$$

Двенадцатое нашли также в 1914 году, оно состоит уже из 77 цифр:

$$2^{126}\cdot(2^{127}-1).$$

В 1932 году математик Лемер решил найти тринадцатое совершенное число. Для этого он решил определить, является ли простым последнее из чисел вида 2^p-1, которые Мерсенн считал простыми, а именно число $2^{257}-1$.

Ему пришлось работать целый год, пользуясь известными тогда счетными приборами, но в результате он убедился, что это число составное, и двенадцатое совершенное число оставалось наибольшим до 1952 года.

* * *

Тринадцатое совершенное число нашла электронная счетная машина. 30 января 1952 года американский математик Робинсон в Калифорнийском университете применил электронную счетную машину для изучения простоты чисел 2^p-1. Робинсон решил для начала определить число $2^{257}-1$. Он пригласил присутствовать при этой проверке Лемера, который двадцать лет тому назад потратил целый год на это вычисление. Лемер получил большое удовольствие, когда увидел, что машина получила тот же самый результат, выполнив его годовую работу за восемнадцать секунд. Для того чтобы найти новое совершенное число, нужно было, следовательно, найти новое простое число. Машина продолжала поиски новых простых чисел. Она проверила за два часа 42 числа, самое меньшее из которых имело более 80 цифр! Все эти числа оказались составными. Новое совершенное число машина обнаружила к вечеру 30 января:

$$2^{520}\cdot(2^{521}-1)\ (p=521).$$

Тринадцатое совершенное число оказалось состоящим из 314 цифр.

Четырнадцатое совершенное число машина нашла в тот же день к полуночи. Перебрав и проверив еще тринадцать евклидовских чисел, она нашла простое число $2^{607}-1$, которое в десятичной системе имеет всего сто восемьдесят три цифры, и соответствующее совершенное число

$$2^{606}\cdot(2^{607}-1)\ (p=607).$$

Четырнадцатое совершенное число имеет 366 значащих цифр.

Пятнадцатое совершенное число машина нашла только в июне 1952 года. Она была очень занята и могла уделять проблеме совершенных чисел только свое свободное от более важных дел время.

Продолжая поиски новых простых чисел, она доказала простоту числа $2^{1279}-1$ и нашла совершенное число

Леонард Эйлер (1707—1783). Математик с мировым именем, выдающийся механик, географ и физик. Родился в Базеле (Швейцария). С 1727 по 1741 и с 1766 до конца жизни жил в России. Интенсивно работая в Петербургской академии наук, многое сделал для развития русской науки и справедливо считается русским ученым.

из семисот семидесяти цифр:

$$2^{1278}\cdot(2^{1279}-1)\ (p=1279).$$

Шестнадцатое и семнадцатое совершенные числа были открыты в октябре 1952 года. Машина к этому времени нашла еще два евклидовских простых числа: $2^{2203}-1$ и $2^{2281}-1$ и вычислила два соответствующих совершенных числа:

$$2^{2202}\cdot(2^{2203}-1)(p=2203),$$

состоящее всего из тысячи трехсот двадцати семи цифр, и

$$2^{2280}\cdot(2^{2281}-1)\ (p=2281),$$

в котором 1373 цифры.

Восемнадцатое совершенное число было найдено в сентябре 1957 года шведским математиком Г. Ризелем. При помощи электронно-счетной машины он за пять с половиной часов установил простоту числа $2^{3217}-1$ и получил восемнадцатое совершенное число:

$$2^{3216}\cdot(2^{3217}-1)\ (p=3217).$$

В нем около 2000 цифр.

Поиски последующих совершенных чисел требовали все большего и большего объема вычислений. Но вычислительная техника непрерывно совершенствовалась, и в 1962 году было найдено два новых совершенных числа, а в 1965 году — еще три. Этим числам соответствуют в формуле Евклида значения p, равные соответственно 4 253, 4 423, 9 689, 9 941 и 11 213. Совершенное число $2^{11212}\times\times(2^{11213}-1)$ имеет 3 376 цифр. Конечно, только благодаря такому помощнику, как вычислительная машина, человек сумел установить, что это огромное число является совершенным.

Вот и все, что почти за два тысячелетия узнали люди о совершенных числах*).

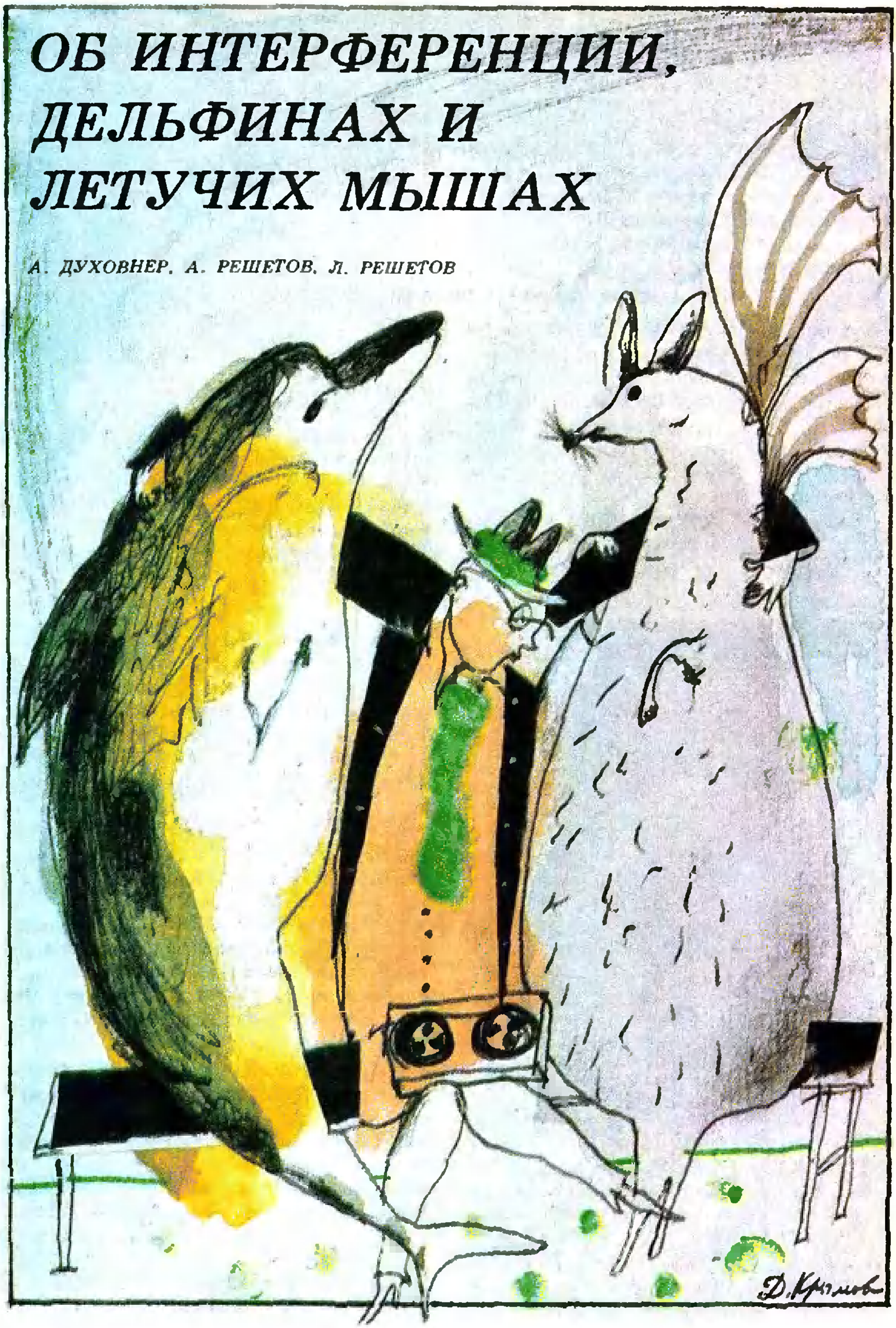
История поисков совершенных чисел наглядно показывает, как сильно увеличивает машина возможности человека. Однако, по словам

(Окончание см. на с. 22)

*) В настоящее время известно уже более 30 простых чисел Мерсенна, максимальное из которых соответствует простому числу $p=216\ 091$.

ОБ ИНТЕРФЕРЕНЦИИ, ДЕЛЬФИНАХ И ЛЕТУЧИХ МЫШАХ

А. ДУХОВНЕР, А. РЕШЕТОВ, Л. РЕШЕТОВ



Вы, наверное, слышали о том, что дельфины и киты «переговариваются» с помощью звуковых сигналов. Не новость для вас и тот факт, что летучая мышь «видит» с помощью ультразвукового локатора. Мы хотим познакомить вас с тем, какую роль в их акустическом мире играет интерференция. Само собой, речь пойдет об интерференции акустических сигналов, или, как говорят, об акустической интерференции. Но сначала вспомним некоторые общие факты.

Наложение волн одинаковых периодов (интерференция), при котором происходит перераспределение энергии в пространстве, является одним из важнейших проявлений всех волновых процессов. Устойчивая во времени интерференция имеет место только для когерентных волн, источники которых колеблются с одинаковой частотой и сохраняют постоянную разность фаз в продолжение времени наблюдения. При этом происходит увеличение амплитуды колебаний в одних точках пространства и уменьшение в других — в зависимости от соотношения между фазами этих волн. Если колебания источников волн происходят по гармоническому (синусоидальному) закону, то амплитуда результирующей волны в какой-либо точке пространства определяется формулой

$$A=\sqrt{A_1^2+A_2^2+2A_1A_2\cos\varphi}, \qquad (1)$$

где A_1, A_2 — амплитуды складывающихся волн, а $\varphi=|\varphi_2-\varphi_1|$ — разность их фаз в рассматриваемой точке.

Практическое значение имеет наложение волн от одного источника колебаний, пришедших в место приема различными путями. В этом случае величина φ зависит от разности расстояний, проходимых волнами от источника до точки интерференции (от разности хода Δr):

$$\varphi=k|r_2-r_1|=k\Delta r, \qquad (2)$$

где $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ — волновое число, λ — длина волны в данной среде.

Полезно вспомнить, почему невозможно получить интерференционную картинку от двух разных источников света. Дело в том, что световая волна состоит из огромного числа коротких световых импульсов, излученных отдельными атомами. Длительность импульсов ($10^{-8}-10^{-9}$ с) гораздо больше периода колебаний видимого света, равного по порядку величины 10^{-15} с; это значит, что каждый импульс представляет собой как бы кусочек волны, содержащий большое число отдельных колебаний. В нелазерных источниках испускание таких импульсов разными атомами происходит совершенно хаотически, вразнобой. Поэтому при встрече двух импульсов разность фаз φ в (1) может быть совершенно произвольной, и интерференцию наблюдать невозможно. Выход известен: свет проходит от источника к точке наблюдения разными путями, и происходит интерференция между двумя импульсами-близнецами, испущенными одним и тем же атомом. В этом случае φ зависит только от разности хода Δr и длины волны света λ (см. (2)). Четкая картинка получается только при небольших Δr. Именно сильная зависимость φ от Δr и λ позволяет использовать явление оптической интерференции в большом количестве прецизионных (сверхточных) приборов.

Теперь перейдем к описанию акустической сигнализации и эхолокации. В обоих случаях сигнал имеет импульсную структуру. Источник посылает один за другим короткие импульсы; прием этих импульсов позволяет наблюдателю получить заложенную в сигнале информацию или просто определить местонахождение источника. Передача информации в виде последовательности импульсов широко используется как в радиотехнике, так и в акустических приборах; ниже мы подробнее опишем, как ей пользуются киты и дельфины. В случае эхолокации (которую используют дельфины и летучие мыши) информацию несет сигнал, пришедший назад после отражения от исследуемого объекта.

Чтобы обеспечить четкий прием сигнала на фоне помех, выгодно использовать импульсы, содержащие волны постоянной частоты. Но здесь же кроется и опасность: если импульс пришел в точку наблюдения двумя или несколькими путями, то возможно полное или частичное ослабление этого импульса за счет интерференции (если разность фаз равна π, 3π и т. д.). Потеря даже нескольких импульсов может привести к существенному искажению информации, к потере объекта поиска и т. д.

В случае технического применения необходимая надежность приема сигналов достигается значительным увеличением мощности излучения и использованием автоматической регулировки усиления. Наш же рассказ о том, каким остроумным способом летучие мыши и дельфины устраняют влияние случайных изменений суммарной амплитуды при интерференции волн и даже находят этому явлению полезное применение. Оказывается, для этого им достаточно определенным образом менять частоту сигнала в пределах каждого импульса*).

Для описания конкретных примеров акустической локации (для летучих мышей и дельфинов) и сигнализации (для дельфинов и китов) важна не только информация о длительности сигналов и их частотной структуре, но и вид так называемой диаграммы направленности излучения и приема (во многих случаях эти диаграммы можно считать одинаковыми).

Диаграмма направленности излучения и приема является результатом наложения волн от каждого элементарного участка поверхности антенны, которые, согласно принципу Гюйгенса, являются источниками сферических волн. В направлении перпендикуляра к поверхности антенны волны от каждого элементарного участка суммируются всегда в фазе, и сигнал максимальный. В других

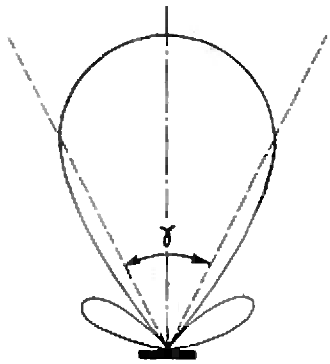


Рис. 1. Диаграмма направленности излучения.

направлениях колебания от различных участков суммируются с некоторой разностью фаз φ и, согласно формуле (1), суммарная амплитуда меньше максимальной. Во многих направлениях колебания различных участков суммируются в противофазе, и интенсивность равна нулю. Ширина угла γ главного лепестка (рис. 1) обратно пропорциональна частоте колебаний и линейному размеру излучающей поверхности.

Летучие мыши охотятся в темное время суток, а днем спят. Поиск и преследование насекомых и бабочек на фоне скал, деревьев, листьев и других хорошо отражающих акустические волны поверхностей они осуществляют при помощи своих звуковых локаторов. Импульсы, излучаемые летучими мышами, отличаются большим разнообразием. Некоторые виды летучих мышей излучают импульсы длительностью от 0,2 до 5 мс, другие — импульсы длительностью до 100 мс. В пределах одного импульса частота излучаемых колебаний может меняться на октаву (в два раза), например от 100 до 50 кГц. В длинных сигналах некоторые семейства мышей меняют частоту только в начале или в конце каждого импульса.

Для акустической антенны летучих мышей величина угла γ основного лепестка диаграммы направленности равна примерно 60°. Широкий угол главного лепестка диаграммы направленности ускоряет поиски насекомых и бабочек, но уменьшает точность

---

*) Подробнее с этими вопросами вы можете познакомиться в книге, написанной авторами этой статьи: «Летучая мышь, гидролокатор и безопасность плавания» (Л.: Судостроение, 1989).

определения направления, так как изменения интенсивности сигнала около оси лепестка незначительны. Увеличить точность определения направления можно при использовании диаграммы из двух лепестков, имеющих узкую область пересечения (темный участок на рисунке 2). Эту область называют равносигнальной, так как только в этом направлении сигналы двух лепестков имеют сравнимую интенсивность. Такую диаграмму можно получить с помощью двух идентичных излучающих поверхностей, расположенных под некоторым углом с разных сторон от центральной оси системы, или поочередным перемещением одной такой поверхности в два разных положения.

Орган слуха дельфинов реагирует на широкий спектр частот — от 1 до 200 кГц. Гидролокацию они осуществляют на высоких частотах. Вследствие дифракции волны хорошо отражаются только от объектов, линейные размеры которых больше длины волны λ. Так как $\lambda=v/f$, где v — скорость распространения акустической волны, для обнаружения относительно мелкой рыбы дельфины должны излучать более высокие частоты. Высокие частоты и относительно большие размеры излучателя уменьшают ширину диаграммы направленности излучения, и она равна 10—15°. При гидролокации дельфины излучают короткие импульсы («щелчки») от 0,01 до 0,1 мс. Вероятность наложения

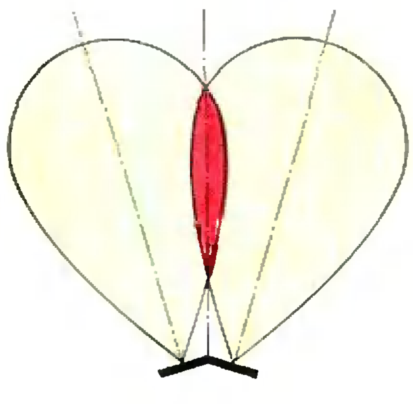


Рис. 2. Диаграмма направленности излучения двух идентичных антенн.

волн при узком угле основного лепестка диаграммы направленности и коротких импульсах незначительна. Частоту колебаний в импульсах гидролокации они не меняют.

Совершенно другая ситуация имеет место при акустической сигнализации. Дельфины и другие китообразные ведут стадный образ жизни. Поэтому им необходимы сигналы связи и оповещения ненаправленного излучения большой дальности приема. Достигли они этого применением наиболее низких частот. При частотах колебаний 8—10 кГц происходит практически ненаправленное излучение (диаграмма направленности имеет вид круга). Дальность приема акустических сигналов у китообразных примерно в 100 раз больше предела зрительной видимости. Согласно наблюдениям, кашалоты слышат друг друга на расстояниях до трех миль (одна морская миля равна 1852,3 м). Их детеныш может отплывать довольно далеко от родителей, и они все время знают, где он находится (прием звука имеет направленный характер). Детеныш также знает, где находятся его родители. Отметим, что роль зрения при контактах очень невелика. Киты, конечно, видят, но на малых расстояниях. Луч лазера проникает в толщу океана на глубину до 100 м, а дальность зрительной видимости даже в прозрачной воде не превышает 30—60 м. Акустическую связь и оповещение дельфины осуществляют сигналами относительно больших длительностей — от 5 до 1000 мс (коммуникационные сигналы — «свисты»). Большие дальности распространения акустических волн относительно низких частот, большие длительности импульсов, ненаправленное излучение приводят к тому, что волны от одного источника таких колебаний приходят к месту приема, как правило, двумя или несколькими путями. Характерной особенностью акустического канала связи в морях и океанах является «многолучевость», и при неизменной частоте сигнала часто происходило бы случайное его ослабление из-за интерференции.

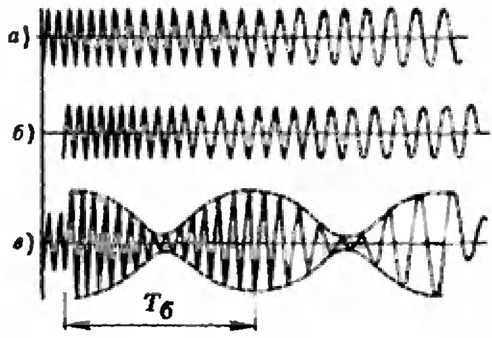


Рис. 3. Суммирование колебаний плавно изменяющихся частот: а) первый импульс; б) второй импульс; в) результат сложения.

Вместо простых сигналов постоянной частоты животные излучают сложные. Они плавно изменяют период (частоту) колебаний, заполняющих каждый импульс. Наложение таких акустических волн приводит к тому, что в месте приема они суммируются с разными частотами. К чему же приводит сложение таких волн? Выясним это на простейшем примере — сложении колебаний, имеющих одинаковую амплитуду A. Согласно тригонометрической формуле $A\sin\alpha + A\sin\beta = 2A\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$, при суммировании колебаний двух разных круговых частот ω_1, ω_2 результирующая амплитуда меняется по закону $2A\left|\cos\frac{(\omega_1-\omega_2)t}{2}\right|$, а частота заполнения равна $\frac{\omega_1+\omega_2}{2}$. Когда ω_1 и ω_2 отличаются незначительно, суммарное колебание называют биением; частота изменения амплитуды равна разности частот $f_б = 1/T_б = |f_1 - f_2|$ (рис. 3). Период биений, возникающих при сложении волн, пришедших в место приема различными путями от источника переменной частоты, зависит от разности хода волн Δr, так как от Δr зависит сдвиг частот складывающихся колебаний.

При излучении колебаний частоту можно менять таким образом, что при приеме волн, пришедших двумя или несколькими путями, период биений будет не больше длительности импульса. Тогда при приеме таких сигналов за время длительности импульса будет не менее одного максимума (A_1+A_2) и одного минимума (A_1-A_2) амплитуды. Средняя мощность каждого такого импульса связи и оповещения дельфина при распространении волн двумя или несколькими путями остается неизменной. Это же относится и к каждому импульсу летучей мыши при отражении волн от двух рядом расположенных объектов. Частота биений $f_б = |f_2(t) - f_1(t)|$ характеризует запаздывание второй волны относительно первой, пришедшей более коротким путем. По частоте биений летучая мышь может определить удаление жертвы охоты от хорошо отражающего фона (скалы, ствола дерева, листьев).

Совершенные числа

(Начало см. на с. 13)

Эдмунда Ландау, одного из крупнейших специалистов в области теории чисел:

«...Две проблемы остаются нерешенными до сих пор:

— Имеется ли бесконечное множество четных совершенных чисел? — Не знаю.

— Имеется ли бесконечное множество нечетных совершенных чисел? — Я даже не знаю, существует ли одно такое число».

Вряд ли к этому нужно что-либо добавлять.

Упражнения

1. Докажите, что число вида $2^{k-1}\cdot(2^k-1)$, где 2^k-1 — простое число, является совершенным.

2. Обозначим через $\sigma(n)$, где n — натуральное число, сумму всех делителей числа n. Докажите, что если числа n_1 и n_2 — взаимно просты, то $\sigma(n_1\cdot n_2)=\sigma(n_1)\cdot\sigma(n_2)$.

3. Пусть n — четное совершенное число. Тогда $\sigma(n)=2n$. Представьте n в виде $2^{k-1}b$, где $k\geqslant 2$, а b — нечетно, и докажите, что $b=(2^k-1)c$. Докажите далее, что $c=1$ и 2^k-1 — простое число.

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

Ежегодно наш журнал проводит конкурс среди школьников по решению задач из «Задачника «Кванта». Объявляем имена победителей конкурса «Задачник «Кванта» 1990 года.

Награждены свидетельством и значком журнала «Квант» и получили право участвовать сразу в четвертом (республиканском) туре Всесоюзной олимпиады школьников 1991 года:

По математике

Ахмедов А.— Баку, с. ш. № 2, 11 кл.
Ахмедов А.— Баку, с. ш. № 58, 9 кл.
Белоус Ю.— Нижний Тагил, с. ш. № 9, 10 кл.
Гетуи С.— Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Зарьков К.— Минск, МССШ при БГУ, 10 кл.
Кириллов И.— Усть-Каменогорск, с. ш. № 25, 11 кл.
Ковацеико С.— Винница, с. ш. № 17, 11 кл.
Корниенко А.— Днепропетровск, с. ш. № 36, 10 кл.
Корсак С.— п. Штефан-Водэ МССР, с. ш. № 2, 10 кл.
Кудрявцева А.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Панов Т.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Петросян А.— Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 10 кл.
Пикялите Е.— Вильнюс, с. ш. № 45, 11 кл.
Разин А.— Одесса, с. ш. № 36, 11 кл.
Рычков В.— Самара, с. ш. № 135, 11 кл.
Саввиди К.— Ереван, ФМШ при ЕрГУ, 11 кл.
Сарсембаев А.— Алма-Ата, РФМОШИ, 10 кл.
Сафронов А.— Томск, с. ш. № 7, 9 кл.
Сироткин Г.— Харьков, с. ш. № 27, 10 кл.
Славкин М.— Минск, с. ш. № 19, 11 кл.
Солодов А.— Воронеж, колледж № 1, 11 кл.
Солодушкин А.— Томск, с. ш. № 7, 9 кл.
Хасин М.— Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.

По физике

Абдримов А.— Шават, ФМШ № 120, 11 кл.
Балюнас Н.— Вильнюс, с. ш. № 45, 12 кл.
Барашков М.— Осиповка Могилевской обл., Осиповская с. ш., 11 кл.
Вейтас Г.— Вильнюс, с. ш. № 45, 12 кл.
Гребенев П.— Кузнецовск, с. ш. № 1, 9 кл.
Гуляев Н.— Н. Новгород, с. ш. № 82, 10 кл.
Гуц Ю.— Ровно, с. ш. № 13, 11 кл.
Давлетов А.— Алма-Ата, с. ш. № 23, 11 кл.
Дементьев А.— Чебоксары, с. ш. № 45, 11 кл.
Диброва С.— Киев, с. ш. №206, 10 кл.
Дубовик А.— Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Душамов Д.— Шават, ФМШ № 120, 11 кл.
Журавлев И.— Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
Калюжный К.— Одесса, с. ш. № 17, 11 кл.
Климчук Е.— Кузнецовск, с. ш. № 1, 11 кл.
Козлов В.— Старый Оскол, с. ш. № 16, 10 кл.
Колпаков М.— п. Почет Красноярского края, Почетская с. ш., 11 кл.
Логинов Д.— Тула, с. ш. № 73, 11 кл.
Перадзе Г.— Тбилиси, ФМШ при ТГУ, 11 кл.
Польшин С.— Харьков, с. ш. № 27, 11 кл.
Рахимов У.— Шават, ФМШ № 120, 11 кл.
Сапаев У.— Шават, ФМШ № 120, 11 кл.
Снежко А.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Супрун Д.— Минск, с. ш. № 50, 11 кл.
Томилко М.— Брест, с. ш. № 1, 11 кл.
Третьяков В.— Алма-Ата, РФМОШИ, 10 кл.
Третьяков Ю.— Алма-Ата, РФМОШИ, 11 кл.
Тыртычко В.— Кустанай, с. ш. № 17, 11 кл.
Храбров Р.— Северодвинск, с. ш. № 17, 11 кл.
Шаповалов Г.— Киев, с. ш. № 209, 11 кл.

Награждены свидетельством и значком журнала «Квант» и книгами серии «Библиотечка «Квант» за активное участие в конкурсе (в этот список вошли победители конкурса, имеющие право участвовать в республиканских олимпиадах как победители прошлогодних олимпиад, учащиеся школ городов и интернатов, выставляющих свою команду сразу на Всесоюзную олимпиаду, а также те, кто не вошел в первый список из-за ограниченности числа предоставленных нам мест):

По математике

Андриенко Д.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Бородин А.— Донецк, с. ш. № 17, 10 кл.
Бринюк В.— Донецк, с. ш. № 35, 9 кл.
Волченко К.— Донецк, с. ш. № 17, 11 кл.
Гельбанд М.— Одесса, с. ш. № 100, 10 кл.
Егорова И.— Ленинград, с. ш. № 76, 10 кл.
Жеглов А.— Москва, ФМШ при МГУ, 11 кл.
Зингер А.— Москва, с. ш. № 43, 10 кл.
Изместьев И.— п. Суна Кировской обл., Сунская с. ш., 10 кл.

(Окончание см. на с. 32)

Задачник „Кванта"

Задачи

М1281 — М1285, Ф1288 — Ф1292

Этот раздел ведется у нас из номера в номер с момента основания журнала. Публикуемые в нем задачи нестандартны, но для их решения не требуется знаний, выходящих за рамки школьной программы. Наиболее трудные задачи отмечаются звездочкой. После формулировки задачи мы обычно указываем, кто нам ее предложил. Разумеется, не все эти задачи публикуются впервые.

Решения задач из этого номера следует отправлять не позднее 15 июля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант». Решения задач из разных номеров журнала или по разным предметам (математике и физике) присылайте в разных конвертах. На конверте в графе «Кому» напишите: «Задачник «Кванта» № 5—91» и номера задач, решения которых вы посылаете, например «М1281» или «Ф1288». В графе «...адрес отправителя» фамилию и имя просим писать разборчиво. В письмо вложите конверт с написанным на нем вашим адресом (в этом конверте вы получите результаты проверки решений).

Условие каждой оригинальной задачи, предлагаемой для публикации, присылайте в отдельном конверте в двух экземплярах вместе с вашим решением этой задачи (на конверте пометьте: «Задачник «Кванта», новая задача по физике» или «...новая задача по математике»).

В начале каждого письма просим указывать номер школы и класс, в котором вы учитесь.

Задачи М1281, М1282, М1284 и М1285 предлагались осенью прошлого года на математической олимпиаде «Турнир городов».

Задачи Ф1289, Ф1291 и Ф1292 предлагались на заключительном этапе XVII Всероссийской олимпиады школьников по физике.

М1281. Докажите, что если произведение двух положительных чисел больше их суммы, то их сумма больше 4.

Н. Васильев

М1282. Докажите, что не существует двух (отличных от параллелограмма) трапеций таких, что боковые стороны каждой из них соответственно равны основаниям другой.

В. Произволов

М1283. Квадрат 99×99 разбит на фигурки трех типов (рис. 1).

а) Докажите, что фигурок первого типа не меньше чем 199.

б) Приведите пример разбиения, когда фигурок первого типа ровно 199.

Д. Фомин

М1284. На основании AB равнобедренного треугольника ACB выбрана точка D так, что окружность, вписанная в треугольник BCD, имеет тот же радиус, что и окружность, касающаяся продолжений отрезков CA и CD и отрезка AD (вневписанная в треугольник ACD). Докажите, что этот радиус равен $1/4$ высоты треугольника, опущенной на боковую сторону.

И. Шарыгин

М1285. Имеется колода из n карт, сложенных по порядку: 1, 2, 3, ..., n. Разрешается взять подряд несколько карт и, не меняя порядка, вставить их в любое другое место колоды (можно в начало или в конец). Пусть $M(n)$ — наименьшее число таких операций, необходимое, чтобы сложить карты в обратном порядке. Докажите, что

а) $M(9)\leqslant5$, б) $M(52)\leqslant26$, в)* $M(52)\geqslant17$, г)* $M(52)\geqslant26$.

Найдите $M(n)$ для любого $n>2$.

Г. Воронин

Ф1288. Посредине большой круглой комнаты диаметром 20 м с высотой потолка 3,2 м стоит большой сейф в виде куба с ребром 3 м. При помощи игрушечной катапульты, расположенной на полу, мы хотим забросить камешек на середину «крыши» сейфа так, чтобы камешек не коснулся потолка. Какая минимальная скорость для этого необходима? При какой высоте потолка в комнате это вообще возможно?

З. Рафаилов

Ф1289. В теплоизолированный цилиндрический сосуд поместили кусок льда с температурой 0 °С и прочно прикрепили его ко дну, а затем залили его таким же по массе количеством воды. Вода достигла уровня $h=20$ см, полностью покрыв лед. Определите, какова была температура этой воды, если после установления теплового равновесия ее уровень опустился на $b=0{,}4$ см. Данные возьмите из таблиц.

М. Гаврилов

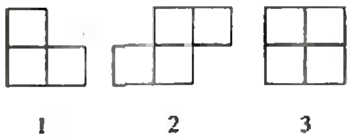


Рис. 1.

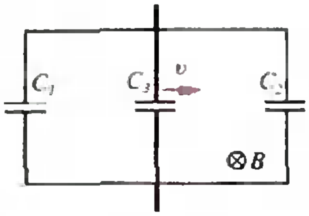


Рис. 2.

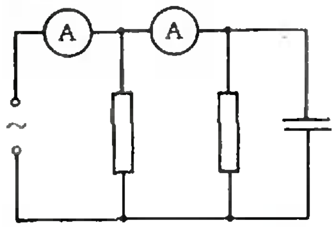


Рис. 3.

Задачник „Кванта"

Ф1290. Между двумя параллельными шинами включены конденсаторы C_1 и C_2 (рис. 2). Проводящая перемычка длиной L с конденсатором C_3 касается шин. Перпендикулярно плоскости шин направлено однородное магнитное поле индукцией B. Перемычка движется с постоянной скоростью v. Найдите заряд на конденсаторе C_3.

Г. Федотович

Ф1291. Схема из двух одинаковых резисторов и конденсатора подключена к сети переменного напряжения 36 В, 50 Гц (рис. 3). Показания первого амперметра 0,3 А, второго — 0,2 А. Считая приборы идеальными, найдите сопротивление резисторов и емкость конденсатора.

А. Зильберман

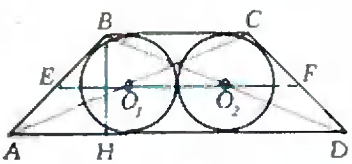
Ф1292. На расстоянии 20 см от точечного источника света помещена собирающая линза диаметром 1 см с фокусным расстоянием 10 см, а на расстоянии 50 см от источника — собирающая линза диаметром 10 см с фокусным расстоянием 20 см. Главные оптические оси линз совпадают, источник находится на оси. На каком расстоянии за большой линзой нужно поместить экран, чтобы световое пятно на нем имело минимальный внешний диаметр? Найдите диаметр этого пятна. Изменится ли освещенность пятна, если убрать маленькую линзу?

А. Сашин

Решения задач

М1256, М1257, М1259, М1260, Ф1268 — Ф1272

М1256. Две равные окружности касаются друг друга. Постройте трапецию такую, что каждая из окружностей касается трех ее сторон, а центры окружностей лежат на диагоналях трапеции.



Пусть построение выполнено (см. рис.). EF — средняя линия трапеции $ABCD$, O_1 и O_2 — центры окружностей, BH — высота трапеции; $AD=a$, $BC=b$, $a>b$. Тогда

$$EO_1=\frac{b}{2},\quad EO_2=\frac{b}{2}+2R=\frac{a}{2}.$$

Следовательно,

$$AH=\frac{a-b}{2}=2R \text{ и } \angle BAD=\frac{\pi}{4},$$

после чего способ построения очевиден.

В. Сендеров

М1257. Дан многочлен $F(x)$ с целыми коэффициентами, причем известно, что для любого целого n число $F(n)$ делится на одно из целых чисел a_1,*

Предположим, напротив, что для каждого из a_i ($i=1, 2, \ldots, m$) найдется целая точка x_i, в которой $F(x_i)$ не делится на a_i. Разложив каждое a_i на простые множители, выделим тот множитель вида $p_i^{s_i}$ (p_i — простое), на который не делится $F(x_i)$. Из степеней $q_i=p_i^{s_i}$ с одинаковыми p_i оставим одну — с наибольшим

$a_2, \ldots, a_m$. Докажите, что из этих чисел можно выбрать одно число так, что $F(n)$ будет делиться на него для любого целого n.

Китайская теорема об остатках
Пусть натуральные числа $q_1, q_2, \ldots, q_r$ попарно взаимно просты. Тогда для любых целых $x_1, x_2, \ldots, x_r$ найдется целое x такое, что $x - x_i$ делится на q_i для каждого $i = 1, 2, \ldots, r$.

Срок решения задачи М1258 продлен (см. поправку в № 3 на с. 30).

показателем; можно считать, что останутся числа $q_1, q_2, \ldots, q_r$ ($r \leqslant m$). Важно, что все они взаимно просты, причем если число b не делится на $q_1 q_2 \ldots q_r$, то оно не делится ни на одно из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Поскольку $F(x)$ — многочлен с целыми коэффициентами, а $F(x_i)$ не делится на q_i, то и $F(x_i + kq_i)$ при любом целом k не делится на q_i: в самом деле, разность

$$F(x_i + kq_i) - F(x_i)$$

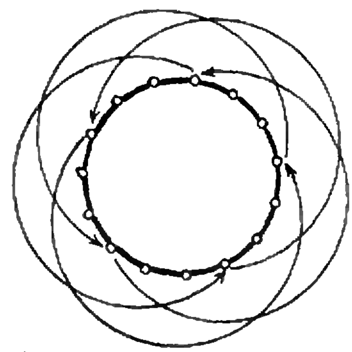
делится на kq_i, поскольку разность $y^j - x^j$ делится на $y - x$ при любых целых x, y и натуральном j.

Но бесконечные арифметические прогрессии $x_i + kq_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$) со взаимно простыми разностями q_i обязательно имеют непустое пересечение (это — *китайская теорема об остатках*, приведенная на полях). Таким образом, существует целое x, для которого $F(x)$ не делится ни на одно из q_i и тем самым — ни на одно из a_i, что противоречит условию.

Задачу можно решать также индукцией (по $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$ или по числу простых множителей $a_1 a_2 \ldots a_m$).

Д. Фомин

М1259. На окружности дано множество E из $(2n-1)$ различных точек ($n \geqslant 3$), из которых k точек покрашены в черный цвет, а все остальные — в белый. Раскраска точек называется хорошей, если существуют две черные точки, строго между которыми на одной из дуг окружности содержится ровно n точек из множества E. Найдите наименьшее значение k, для которого каждая раскраска точек множества E является хорошей.



Ответ: наименьшее k равно $n-1$, если $n-2$ делится на 3, и n в противном случае.

Удобно считать, что соседние точки множества E расположены на расстоянии 1 друг от друга (расстояния меряются по окружности).

Разобьем все $2n-1$ точек множества E на циклы по следующему правилу: две точки принадлежат одному циклу, если от одной из них можно прийти в другую шагами длины $n+1$, т. е. перешагивая через n промежуточных точек. Очевидно, шаг длиной $n+1$ на окружности длины $2n-1$,— это то же, что шаг длиной $n-2$ в противоположном направлении. Поэтому точки, отстоящие на 3, принадлежат одному циклу.

Если $n = 3m+2$, то $2n-1 = 6m+3$ и $n-2 = 3m$ делятся на 3, поэтому циклов 3, в каждом по $2m+1$ точек (см. рисунок; здесь $n=8$, $2n-1=15$, красными стрелками показан один из циклов). Если в каждом цикле расположить m черных точек так, чтобы отстоящие от них на один шаг (в ту и в другую сторону) точки были белыми, ни одной пары черных точек на расстоянии $n+1$ не будет. С другой стороны, при $k \geqslant 3m+1 = n-1$ в некоторый цикл попадут не менее $m+1$ черных точек, а среди них заведомо есть две, отстоящие на один шаг.

Если $n = 3m$ или $n = 3m+1$, то $2n-1$ не делится на 3, так что все точки принадлежат одному циклу, и черных точек должно быть не менее n (иначе их можно расположить в цикле через одну с белыми).

Е. Малинникова

Задачник „Кванта"

M1260*. Найдите все целые числа $n>1$ такие, что $(2^n+1)/n^2$ — целое число.

Малая теорема Ферма
Если p — простое число, a — любое целое взаимно простое с p, то $a^{p-1}-1$ делится на p.

Эта теорема, а также китайская теорема об остатках, которая использована выше, наряду с другими основными теоремами арифметики будут обсуждаться в одном из ближайших номеров «Кванта» в статье «Арифметика остатков».

Ответ: $n=3$ — единственное нужное число.

Будем обозначать наибольший общий делитель целых чисел a, b через (a, b).

В решении постоянно будут использоваться такие леммы:

(1) Если p — простое, то $2^{p-1}-1$ делится на p. Это — частный случай малой теоремы Ферма.

(2) Если a, b, p — натуральные числа такие, что 2^a-1 и 2^b-1 делятся на p, то и $2^{(a,b)}-1$ делится на p.

Последнее утверждение мы докажем в конце решения.

Вернемся к исходной задаче. Пусть 2^n+1 делится на n, p — наименьший простой делитель n (n и p — нечетные числа, больше 1.) Поскольку $2^{2n}-1=(2^n+1)(2^n-1)$ делится на p и согласно (1) $2^{p-1}-1$ делится на p, а $(2n, p-1)=2$ (ведь любой простой делитель $2n$, кроме 2, больше p), в соответствии с (2) 2^2-1 делится на p, т. е. $p=3$.

Положим $n=3m$. Если $m=1$, то $n=3$ и $2^n+1=9$ делится на $n^2=9$. Докажем, что случай $m>1$ невозможен.

Допустим сначала, что m делится на 3, так что $n=3^kl$, $k>1$ и $(l, 3)=1$. Если 2^n+1 делится на n^2, то оно делится на 3^{2k}. Разложим $2^n+1=(-1+3)^n+1$ по формуле бинома Ньютона и учтем, что n нечетно:

$$1+(-1+3)^n=1+(-1)^n+3n-$$
$$-3^2\frac{n(n-1)}{2}+\ldots+(-1)^{n-s}3^s\frac{n!}{s!}+\ldots+3^n.$$

Отсюда видно, что $3n=3^{k+1}l$ делится на 3^{k+2}. (Остальные члены $3^sn!/s!$ ($s\geqslant 2$) делятся на 3^{k+2} поскольку степень 3, на которую делится $s!$, меньше $\frac{s}{3}+\frac{s}{9}+\frac{s}{27}+\ldots=\frac{s}{2}$, n делится на 3^k, и потому 3 входит с показателем большим $s-s/2+k=s/2+k\geqslant k+1$.) Но это противоречит тому, что $(l, 3)=1$.

Пусть теперь q — наименьший простой делитель m, $q\geqslant 5$. Как и выше, используем (1) и (2). Поскольку $2^{2n}-1$ и $2^{q-1}-1$ делятся на q, $d=(2n, q-1)$ может равняться лишь 2 или 6 (ведь простые делители $n=3m$, кроме 3, больше q), причем 2^d-1 делится на $q\geqslant 5$. Остается рассмотреть случай $d=6$. Тогда $2^6-1=63$, $q=7$. Поскольку 2^3-1 делится на 7, то $2^n-1=2^{3m}-1$ делится на 7, но тогда 2^n+1 не делится на 7 и тем самым на n.

Осталось доказать лемму (2). Мы докажем эквивалентное утверждение:

$$(2^a-1, 2^b-1)=2^{(a,b)}-1.$$

Вспомним, что наибольший общий делитель (a, b) можно искать с помощью алгоритма Евклида: если $a>b$, то

$$(a, b)=(a-b, b), \qquad (*)$$

переходя с помощью шагов (*) к меньшим числам — меняя при надобности их местами, $(x, y)=(y, x)$ — мы приходим к паре $(d, 0)$, где $d=(a, b)$

Заметим теперь, что (при $a>b>1$)

$$(2^a-1,\ 2^b-1)=(2^a-2^b,\ 2^b-1)=(2^b(2^{a-b}-1),\ 2^b-1)=$$
$$=(2^{a-b}-1,\ 2^b-1)\quad (**)$$

в последнем равенстве используется, что число 2^k-1 при $k>1$ нечетны. Таким образом, каждому шагу (*) соответствует шаг (**) и одновременно с парой $(d, 0)$ в первой цепочке алгоритма Евклида мы получим пару $(2^d-1,\ 2^0-1)=(2^d-1,\ 0)$ во второй цепочке. Отсюда следует, что

$$(2^a-1,\ 2^b-1)=2^d-1.$$

Е. Малинникова

Ф1268. *Сферический стеклянный аквариум заполнен водой и вращается с постоянной угловой скоростью вокруг вертикальной оси. После того как оболочку мгновенно затормозили и отпустили, угловая скорость вращения установилась в 1,5 раз меньшей, чем была вначале. Какую часть массы аквариума составляет вода? Считать, что стекло имеет плотность в три раза большую, чем вода.*

Эта задача — упрощенный вариант третьей задачи теоретического тура Международной физической олимпиады школьников 1990 года.

Для решения задачи нужно выйти за пределы школьной программы по физике (для наших учащихся) — воспользоваться законом сохранения момента импульса и формулой для момента инерции шара в случае, когда ось вращения проходит через его центр. Так, момент инерции водяного «шара» радиусом R и плотностью ρ равен

$$I_1=\frac{2}{5}mR^2=\frac{2}{5}\ \frac{4}{3}\pi\rho R^3R^2=\frac{8}{15}\pi\rho R^5.$$

Чтобы записать момент инерции стеклянной оболочки (обозначим внешний радиус R_1), нужно из выражения для момента инерции сплошного шара радиусом R_1 вычесть момент инерции «внутреннего» шара радиусом R:

$$I_2=\frac{8}{15}\pi 3\rho R_1^5-\frac{8}{15}\pi 3\rho R^5=\frac{8}{5}\pi\rho(R_1^5-R^5).$$

Общий момент инерции стеклянного аквариума и находящейся в нем воды равен сумме моментов инерции I_1 и I_2:

$$I_{\text{общ}}=I_1+I_2.$$

Теперь запишем закон сохранения момент импульса для замкнутой системы «аквариум — вода»:

$$\omega_0 I_1=\frac{2}{3}\omega_0(I_1+I_2),$$

или

$$I_2=1/2I_1.$$

Отсюда находим соотношение между радиусами R_1 и R:

$$\frac{8}{5}\pi\rho(R_1^5-R^5)=\frac{1}{2}\frac{8}{15}\pi\rho R^5,$$

или

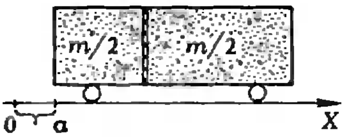
$$R_1^5/R^5=7/6$$

и отношение масс воды и аквариума с водой:

$$\frac{m_в}{m_{общ}}=\frac{4/3\pi\rho R^3}{4/3\pi\rho R^3+4/3\pi 3\rho(R_1^3-R^3)}=\frac{1}{1+3(R_1^3/R^3-1)}\approx 0{,}8.$$

О. Нидерландский

Ф1269. Вагон массой M и длиной L может без трения двигаться по рельсам. Он заполнен газом и разделен посередине подвижной невесомой вертикальной перегородкой. Вначале температура газа равна T. В правой половине вагона включают нагреватель и доводят температуру газа до $2T$, в левой части температура остается прежней. Найдите перемещение вагона, если масса всего газа m.



Так как до включения нагревателя давление, объем и температура в левой и правой половинах вагона одинаковы, одинаковы и массы газа слева и справа от перегородки. При установившихся температурах после включения нагревателя давление в обеих частях вагона снова одинаково, тогда как объемы различны. Запишем уравнение Клапейрона — Менделеева для каждой из частей:

$$pV_1=\nu RT,\quad pV_2=2\nu RT.$$

Отсюда получаем, что

$$V_1/V_2=1/2,$$

поэтому перегородка теперь находится на расстоянии $l=1/3L$ от левого края вагона.

Направим горизонтальную ось X вдоль рельсов и выберем начало отсчета так, чтобы вначале левый край вагона имел координату $x=0$. При этом координата центра масс вагона будет равна

$$x_1=\frac{ML/2+mL/2}{M+m}=\frac{L}{2}.$$

При изменении температуры газа справа от перегородки вагон переместился вправо на некоторое расстояние a (см. рисунок). Теперь центр масс газа в левой части вагона находится на расстоянии $L/6$ от левого края, а в правой части — на расстоянии $1/3L+1/2\cdot 2/3L=$ $=2/3L$. Новая координата центра масс системы равна

$$x_2=\frac{M(L/2+a)+m/2(L/6+a)+m/2(2/3L+a)}{M+m}=$$

$$=a+\frac{ML/2+m5/12L}{M+m}.$$

Но, так как по горизонтальной оси на систему не действуют внешние силы, положение центра масс системы не изменилось:

$$x_1=x_2.$$

Отсюда находим, что вагон переместился на расстояние

$$a=\frac{L}{2}-\frac{ML/2+m5/12L}{M+m}=\frac{L}{12}\,\frac{m}{M+m}.$$

А. Выцко

Ф1270. Неоновая лампа НЛ (рис. 1) «вспыхивает» при увеличении напряже-

После подключения конденсатора C_1 через резистор R начнет заряжаться конденсатор C_2. Когда напряжение на нем достигнет U_1, «вспыхнет» неоновая лампа.

ния до $U_1=80$ В и гаснет при уменьшении напряжения до $U_2=25$ В. Конденсатор C_1 емкостью 10 мкФ заряжают до напряжения $U_0=300$ В и подключают к схеме (генератору пилообразного напряжения). Сколько раз вспыхнет неоновая лампа? Какое количество теплоты выделится в системе? $C_2=0{,}1$ мкФ, $R=1$ МОм.

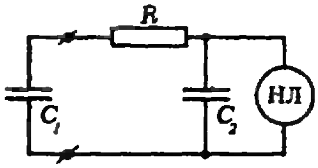


Рис. 1.

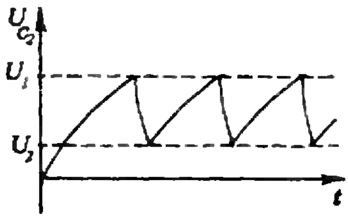


Рис. 2.

Через нее конденсатор C_2 будет разряжаться до напряжения U_2, при котором лампа погаснет (рис. 2). Поскольку сопротивление резистора много больше сопротивления горящей лампы, за время «вспышки» конденсатор C_1 не успеет существенно разрядиться. Следовательно, через лампу пройдет заряд

$$q=C_2(U_1-U_2).$$

«Вспышки» будут продолжаться до тех пор, пока конденсатор сможет заряжаться до U_1. Так как $C_1 \gg C_2$, после прекращения «вспышек» в системе останется заряд

$$q_к=C_1U_1.$$

Начальный заряд был

$$q_н=C_1U_0.$$

Таким образом, число вспышек лампы будет равно

$$N=\frac{q_н-q_к}{q}=\frac{C_1(U_0-U_1)}{C_2(U_1-U_2)}=400,$$

а количество теплоты, выделившееся в системе,—

$$Q=W_н-W_к=\frac{C_1U_0^2}{2}-\frac{C_1U_1^2}{2}\approx 0{,}42\ Дж.$$

Н. Павлов

Ф1271. Два одинаковых проволочных кольца радиусом R и массой m каждое находятся в однородном магнитном поле, индукция которого равна B_0 и направлена перпендикулярно плоскости колец (рис. 1). В точках соприкосновения A и C кольца имеют хороший электрический контакт. Угол $\alpha=\pi/3$. Какую скорость приобретает каждое из колец, если выключить магнитное поле? Электрическое сопротивление куска проволоки, из которого сделано кольцо, равно r. Индуктивность колец не учитывать. Смещением колец за время выключения поля пренебречь. Трения нет.

При выключении внешнего магнитного поля абсолютная величина магнитной индукции изменяется со временем от начального значения B_0 до нуля. Изменяющееся магнитное поле вызывает появление вихревого электрического поля, которое приводит в движение свободные заряды проволочных колец, т. е. возбуждает в кольцах электрический ток. Найдем эти токи для произвольного момента времени t после выключения магнитного поля.

Рассмотрим замкнутый контур $AfCbA$, совпадающий с контуром левого кольца (рис. 2). Согласно правилу Ленца, токи направлены по часовой стрелке, если магнитное поле направлено от нас за чертеж. Пусть на участке контура AfC ток равен $I_1(t)$, а на участке CbA — $I_2(t)$. ЭДС индукции, возникающая в нашем контуре, равна

$$\mathcal{E}_{инд}=-\pi R^2\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

По закону Ома для замкнутой цепи можно записать

$$\mathcal{E}_{инд}=I_1(t)\frac{r}{2\pi R}l_{AfC}+I_2(t)\frac{r}{2\pi R}l_{CbA},$$

или, учитывая что длины дуг l_{AfC} и l_{CbA} равны соответственно $\pi R/3$ и $5\pi R/3$,

$$I_1(t)+5I_2(t)=-\frac{6\pi R^2}{r}\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

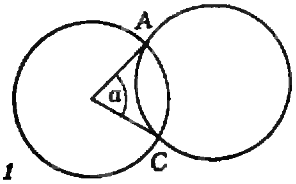


Рис. 1

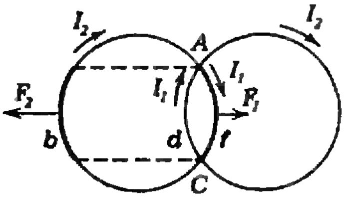


Рис. 2.

Совершенно аналогично запишем закон Ома для контура $AfCdA$:

$$I_1(t) = -\frac{(2\pi - 3\sqrt{3})R^2}{2r}\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

Подставив значение $I_1(t)$ в предыдущее уравнение, получим равенство

$$I_2(t) = -\frac{(10\pi + 3\sqrt{3})R^2}{10r}\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

Согласно закону Ампера, на каждый элемент кольца Δl с током $I(t)$ будет действовать со стороны магнитного поля сила, равная по величине $\Delta F = I(t)\Delta l \cdot B(t)$ и направленная по радиусу кольца. В силу зеркальной симметрии этих сил относительно горизонтальной оси, проходящей через центры колец, результирующая сила, действующая на каждое кольцо в вертикальном направлении, равна нулю. Отсутствие симметрии сил относительно вертикальной оси, проходящей через центр левого кольца ($I_1(t) \neq I_2(t)$), наоборот, приводит к появлению результирующей силы, действующей вдоль горизонтального направления. Очевидно, что она равна разности сил, действующих на дугу AfC и симметричную ей дугу на противоположной стороне кольца:

$$F = F_2 - F_1 = I_2(t)l_{AC}B(t) - I_1(t)l_{AC}B(t),$$

где l_{AC} — длина хорды, на которую опирается дуга AfC ($l_{AC} = 2R\sin\alpha/2 = R$). Окончательное выражение для силы F будет иметь вид

$$F = -\frac{9\sqrt{3}R^3}{5r}B(t)\frac{\Delta B(t)}{\Delta t}.$$

Действие этой силы в течение малого промежутка времени Δt приводит к изменению импульса кольца:

$$m\Delta v = F\Delta t = -\frac{9\sqrt{3}R^3}{5r}B(t)\Delta B(t) = -\frac{9\sqrt{3}R^3}{10r}\Delta(B^2(t)),$$

и, следовательно, кольцо приобретет скорость

$$v = \frac{9\sqrt{3}R^3}{10mr}B_0^2.$$

В. Можаев

Ф1272. *Электрическая лампочка включена в сеть 50 Гц последовательно с катушкой, индуктивность которой 1 Гн. Параллельно лампочке подключили*

При подключении параллельно лампочке конденсатора ток лампочки может как увеличиться, так и уменьшиться — в зависимости от емкости конденсатора.

Обозначим U_0 напряжение в сети и U напряжение на лампочке (рис. 1). Нарисуем векторную диаграмму для этой цепи. Начнем с напряжения на лам-

конденсатор неизвестной емкости, и оказалось, что лампочка горит при этом с той же яркостью, что и без конденсатора. Определите его емкость.

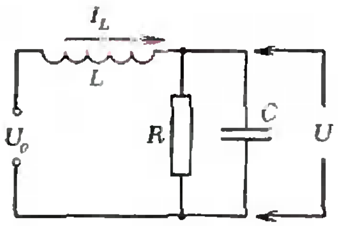


Рис. 1.

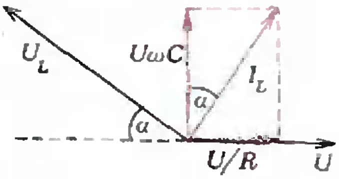


Рис. 2.

почке (и на конденсаторе) U (рис. 2). Ток через катушку I_L равен сумме токов лампочки и конденсатора:

$$I_L = \sqrt{(U/R)^2 + (U\omega C)^2}\,,\ \cos\alpha = U\omega C/I_L.$$

Напряжение на катушке опережает ток в ней на $\pi/2$, а их величины связаны соотношением

$$U_L = \omega L I_L.$$

Найдем из рисунка 2 сумму напряжений U и U_L и приравняем ее к U_0:

$$(U_L \cos\alpha - U)^2 + (U_L \sin\alpha)^2 = U_0^2,$$

или

$$U_L^2 + U^2 - 2UU_L \cos\alpha = U_0^2.$$

Подставляя соответствующие выражения для I_L, U_L и $\cos\alpha$ получим

$$U = \frac{U_0 R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2 + \omega^4 L^2 C^2 R^2 - 2\omega^2 LCR^2}} = U_{\text{нач}} = \frac{U_0 R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}},$$

откуда

$$\omega^4 L^2 C^2 R^2 - 2\omega^2 LCR^2 = 0.$$

Значит, емкость конденсатора равна либо нулю (т. е. случай без конденсатора), либо

$$C = 2/(\omega^2 L) \approx 20\ \text{мкФ}.$$

А. Зильберман

Победители конкурса «Задачник «Кванта»

(Начало см. на с. 23)

Исмаилов Р.— Ленинград, с. ш. № 239, 10 кл.
Кожевников П.— Калуга, с. ш. № 24, 10 кл.
Козачко А.— Виниица, с. ш. № 17, 11 кл.
Лебедев А.— Москва, ФМШ при МГУ, 10 кл.
Львов А.— Москва, с. ш. № 43, 11 кл.
Майдыбаев А.— Москва, ФМШ при МГУ, 10 кл.
Медведев А.— Киев, с. ш. № 183, 6 кл.
Мильштейн К.— Киев, с. ш. № 145, 11 кл.
Мишачев К.— Липецк, с. ш. № 14, 11 кл.
Мучник Р.— Винница, с. ш. № 17, 11 кл.
Насыров А.— Москва, ФМШ при МГУ, 11 кл.
Некрашевич В.— с. Крутые Горы Киевской обл. Ковшеватская с. ш., 10 кл.
Номировский Д.— Киев, ФМШ при КГУ, 10 кл.
Перельман Е.— Ленинград, с. ш. № 239, 9 кл.
Темкин М.— Москва, с. ш. № 57, 11 кл.
Титаренко А.— Москва, с. ш. № 198, 11 кл.
Фельдман К.— п. Черноголовка Московской обл., с. ш. № 82, 10 кл.
Шиндлер А.— Феодосия, с. ш. № 17, 11 кл.

По физике

Воскобойник И.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Денисов И.— Осиповка Могилевской обл., Осиповская с. ш., 11 кл.
Джосюк С.— Винница, с. ш. № 17, 11 кл.
Добровольский С.— Днепропетровск, с. ш. № 111, 11 кл.
Ивченко Н.— Киев, с. ш. № 145, 10 кл.
Кацман И.— Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
Легостаев В.— Кустанай, с. ш. № 17, 11 кл.
Махмудов М.— Исфара, школа-интернат, 10 кл.
Мацко Н.— Киев, с. ш. № 206, 11 кл.
Нежуренко А.— Киев, с. ш. № 206, 10 кл.
Нолищук И.— Долгопрудный, с. ш. № 5, 11 кл.
Тамошюнас В.— Вильнюс, с. ш. № 45, 12 кл.
Чистый А.— Брест, с. ш. № 1, 10 кл.
Чупахин С.— Москва, ФМШ при МГУ, 11 кл.
Шагаров Е.— Грозный, с. ш. № 10, 11 кл.
Шаракин С.— Москва, ФМШ, при МГУ, 11 кл.
Шуляк И.— Киев, ФМШ при КГУ, 11 кл.
Шутенко Т.— Мариуполь, с. ш. № 41, 10 кл.

Задачи

1. Молочница на рынке торговала молоком из двух бочек, одна из которых вмещала молока втрое больше, чем другая. Когда в маленькой бочке оставался 21 литр молока, а в большой — 39 литров, молочница долила доверху маленькую бочку молоком из большой. В результате большая бочка оказалась наполненной ровно наполовину. Сколько молока она отлила и какого объема были бочки?

2. В круге проведены диаметр и перпендикулярная ему хорда. Докажите, что один из отрезков, на которые хорда разбивает диаметр, будет больше половины хорды, а другой — меньше.

3. В стакан с водой положили камень, в результате этого часть воды вытекла. Легче или тяжелее стал стакан?

4. Решите арифметический ребус. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным — разные.

5. Горошины расположены в виде квадрата. Покажите, что в этом случае их можно расположить в виде двух равносторонних треугольников таких, что сторона одного из них была бы равна стороне квадрата, а другого — на единицу меньше.

Эти задачи нам предложили: Н. Антонович, А. Ханян, В. Вьюн, Г. Гальперин и Н. Авилов.

КАК КИПИТ ВОДА?

Дж. УОКЕР

Как ни обычно это явление, вы, скорее всего, не замечали всех его удивительных особенностей. С одними нельзя не считаться на практике, другие позволяют проводить весьма опасные трюки, которые когда-то показывали на карнавалах смельчаки.

Мы продолжаем публикацию статей из книги D. Halliday, R. Resnick. "Fundamentals of Physics", Third edition extended, 1988 (John Wiley & Sons, N. Y.).
Перевод этой статьи — О. Симоновой.

Начнем с наблюдения. Нагреем кастрюлю водопроводной воды снизу пламенем или электрическим источником тепла. При нагревании воды растворенные в ней молекулы воздуха выделяются из раствора и собираются в крошечные пузырьки в трещинах на дне кастрюли. (Эти участки достаточно малы, чтобы поверхностное натяжение не дало воде залить их при наполнении кастрюли.) Со временем каждый пузырек раздувается, и его плавучесть увеличивается. В конце концов пузырек отрывается от трещины и всплывает на поверхность воды. Так как трещина еще заполнена воздухом, там начинает образовываться другой пузырек. Образование пузырьков воздуха — знак того, что вода нагревается, но это еще далеко не кипение.

Вода, соприкасающаяся с атмосферой, кипит при температуре, которую иногда называют нормальной температурой кипения $t_к$. Например, $t_к = 100$ °С при давлении воздуха 1 атм. Так как вода на дне кастрюли не соприкасается с атмосферой, она остается жидкостью, даже если нагревается выше $t_к$ на несколько градусов. При нагреве и перегреве она постоянно смешивается с остальной водой путем конвекции (горячая вода поднимается, и более холодная вода замещает ее).

При дальнейшем повышении температуры кастрюли нижний слой воды начнет испаряться, и молекулы воды будут собираться в маленькие пузырьки пара в сухих трещинах. Эта фаза кипения отмечена отрывистыми звуками, гудением и иногда жужжанием. Вода почти поет о том, как ей не нравится нагреваться. Каждый раз, как пузырек пара поднимается в более холодную воду, он внезапно исчезает, потому что пар внутри него конденсируется. При каждом таком исчезновении возникает звуковая волна — гудение, которое вы слышите. Когда температура всей массы воды повысится, пузырьки не смогут исчезнуть, пока они не оторвутся от трещин и не пройдут часть пути к поверхности воды (рис. 1).

Если вы продолжаете нагревать кастрюлю, шум исчезающих пузырьков становится громче, а потом исчезает. Шум начинает смягчаться, когда вся вода достаточно горяча, чтобы пузырьки пара достигли поверхности; там они лопаются с легким всплеском. Теперь вода кипит.

Если ваш источник тепла — кухонная плита, история здесь кончается. Однако с помощью лабораторной горелки вы сможете продолжить повышать температуру кастрюли. Теперь пузырьки пара становятся столь многочисленными и отрываются от своих трещин так быстро, что они объединяются и образуют столбы пара, которые бурно и хаотически поднимаются вверх, иногда встречая ранее оторвавшиеся «куски» пара. Образование пузырьков и столбов пара называется пузырчатым (дословно «зародышевым») парообразованием — образование и рост пузырьков зависит от трещин, служащих зародышевыми участками.

Если вы продолжаете повышать температуру кастрюли после стадии столбов и «кусков», парообразование вступает в новую фазу, называемую переходным режимом. Теперь при каждом последующем повышении

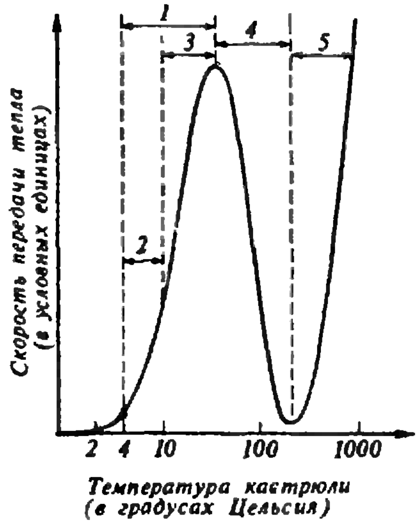


Рис. 1. Кривая кипения для воды. 1 — пузырчатое кипение. 2 — изолированные пузырьки. 3 — столбы и «куски» пара. 4 — переходный режим кипения. 5 — пленочное кипение.

температуры кастрюли скорость передачи тепла воде уменьшается. Это уменьшение — не парадокс. В переходном режиме большая часть дна кастрюли покрыта слоем пара. Так как водяной пар передает тепло на порядок хуже, чем жидкость, передача тепла воде уменьшается. Чем горячее становится кастрюля, тем меньше ее прямой контакт с водой и тем хуже передача тепла. На практике эта ситуация может оказаться опасной. Например, для теплообменника, задача которого — снять тепло с источника. Если допустить, чтобы вода в теплообменнике вошла в переходный режим, источник может опасно перегреться из-за уменьшения отвода тепла.

Возможно, именно это явление стало причиной железнодорожной катастрофы — взрыва паровоза. Локомотив приводился в действие водяным паром. Бойлер с водой располагался над топкой, в которой горела нефть, и отделялся от нее надежным металлическим листом — так называемым потолочным листом. Горячие газы текли от топки по трубам, идущим в воде. Тепло передавалось воде по всей длине труб и по площади потолочного листа. Так как пар в бойлере находился в ограниченном объеме, он был под высоким давлением, что повысило температуру кипения воды.

Обычно это устройство безопасно. Однако, если потолочный лист слишком раскаляется, парообразование входит в переходный режим, что сильно уменьшает передачу тепла через лист. Если ситуация не контролируется, потолочный лист может размягчиться, прогнуться и треснуть под большим давлением и тяжестью воды в бойлере. Очевидно, так и произошло. Когда вода хлынула в топку, резкое падение давления снизило температуру кипения воды. Так как температура воды была выше новой точки кипения, часть ее мгновенно превратилась в пар, объем которого резко увеличился, что и привело к взрыву. Взрыв прорвал бойлер, оторвал его от двигателя, перевернул и отшвырнул в сторону. Погибло три человека.

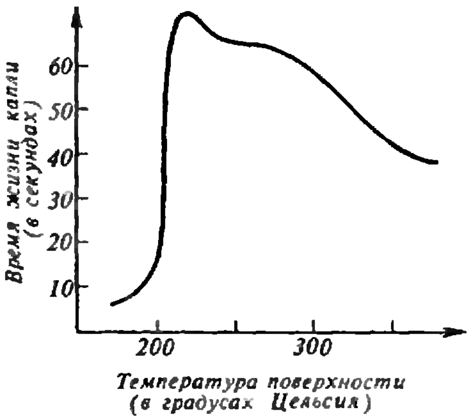


Рис. 2. Кривая времени жизни капли воды на горячей поверхности.

Вернемся к нашим наблюдениям. Допустим, вы все еще продолжаете повышать температуру кастрюли с помощью лабораторной горелки. В конце концов вся поверхность дна покроется паром, и тепло будет медленно передаваться жидкости над паром в основном путем излучения. Эта фаза называется пленочным кипением.

Хотя вы не можете получить пленочное кипение в кастрюле, грея воду на кухонной плите, в кухне оно иногда встречается. Моя бабушка однажды показала, как пленочное кипение помогает определить, достаточно ли разогрелась сковорода для блинов. После того как она немного нагрела пустую сковороду, она брызнула на нее несколько капель воды. Капли с шипением испарились за несколько секунд. Их быстрое исчезновение показало ей, что сковорода еще недостаточно горяча для теста. Нагрев сковороду сильнее, она повторила проверку, брызнув еще воды. В этот раз капли свернулись в шарики и крутились на металлической поверхности более минуты, перед тем как исчезнуть. Теперь сковорода была достаточно горяча для теста.

Для изучения бабушкиного опыта я нагрел плоскую металлическую пластину лабораторной горелкой. Контролируя температуру пластины термопарой, я аккуратно ронял каплю дистиллированной воды из шприца, расположенного точно над пластиной (шприц дал мне возможность получать капли одинакового размера). Капля падала в углубление, сделанное в пластине молотком с шаровым бойком. Уронив каплю, я измерял время ее жизни на пластине. Затем я нарисовал график зависимости времени жизни капель от температуры пластины (рис. 2). У графика есть интересный пик. При температуре пластины от 100 и приблизительно до 200 °С каждая капля растекалась по пластине тонким слоем и быстро испарялась. При температуре пластины около 200 °С капля сворачивалась и жила около минуты. При более высокой температуре пластины водяные шарики не держатся так долго. Подобные эксперименты с водопроводной водой дали график с более плоским пиком, возможно из-за того, что взвешенные частицы прорывают слой плохо проводящего тепло пара.

(Окончание следует)

Конкурс «Математика 6—8»

Этой публикацией мы заканчиваем конкурс «Математика 6—8». Фамилии победителей конкурса будут опубликованы в одном из осенних номеров журнала.

Победителей ждут награды! Решения задач из этого номера высылайте не позднее 15 июля 1991 года по адресу: 103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант» (с пометкой «Конкурс «Математика 6—8»). Не забудьте указать фамилию, имя, школу и класс.

Задачи

25. Найдите четырехзначное число, сумма цифр которого равна разности между 2011 и самим числом.

А. Савин

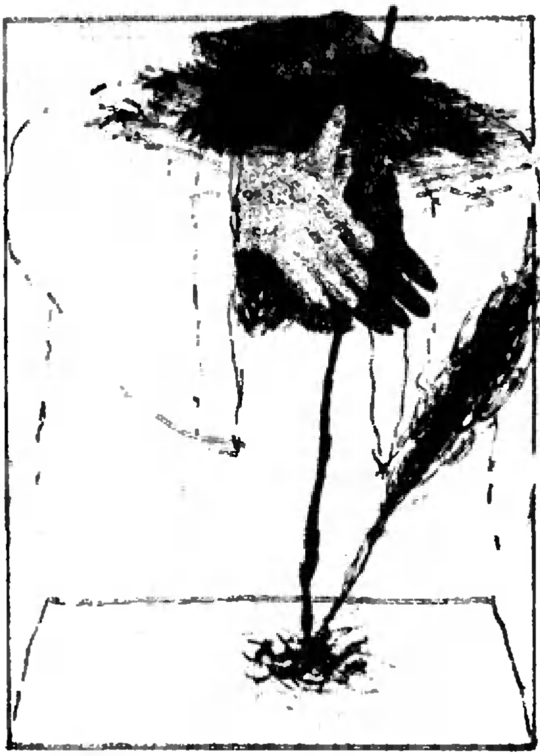
26. Имеется лист бумаги. Его можно разрезать на 6 или 12 частей. Каждый новый кусок можно разрезать также на 6 или 12 частей или оставить целым и так далее.

Можно ли таким образом разрезать лист на 40 частей? Докажите, что можно получить любое число частей, большее 40.

А. Савин

27. Найдите пять чисел, если известно, что их суммы по 3 соответственно равны 3, 4, 6, 7, 9, 10, 11, 14, 15, 17.

А. Савин



Физика 9, 10, 11

Публикуемая ниже заметка «Работа сил трения» предназначена девятиклассникам, заметка «Сила Ампера в однородном магнитном поле» — десятиклассникам, «Недостающие» элементы» — одиннадцатиклассникам.
Кроме того, мы продолжаем публикацию «Избранных школьных задач по физике».

Работа сил трения

Сила трения, как и любая другая сила, совершает работу и соответственно изменяет кинетическую энергию тела при условии, если точка приложения силы перемещается в выбранной системе отсчета. Однако сила трения существенно отличается от других, так называемых консервативных, сил (тяготения и упругости), так как ее работа зависит от формы траектории. Вот почему работу сил трения ни при каких обстоятельствах нельзя представить в виде изменения потенциальной энергии системы. Кроме того, дополнительные сложности при вычислении работы создает специфика силы трения покоя. Здесь существует ряд стереотипов физического мышления, которые хотя и лишены смысла, но очень устойчивы.

Мы рассмотрим несколько вопросов, связанных с не вполне правильным пониманием роли силы трения в изменении энергии системы тел.

1. О силе трения скольжения. Нередко говорят, что сила трения скольжения всегда совершает отрицательную работу и это приводит к увеличению внутренней (тепловой) энергии системы.

Такое утверждение нуждается в важном уточнении — оно справедливо только в том случае, если речь идет не о работе одной отдельно взятой силы трения скольжения, а о суммарной работе всех таких сил, действующих в системе. Дело в том, что работа любой силы зависит от выбора системы отсчета и может быть отрицательной в одной системе, но положительной в другой. Суммарная же работа всех сил трения, действующих в системе, не зависит от выбора системы отсчета и всегда отрицательна. Вот конкретный пример.

Положим кирпич на движущуюся тележку так, чтобы он начал по ней скользить (рис. 1). В системе отсчета, связанной с землей, сила трения F_1, действующая на кирпич до прекращения скольжения, совершает положительную работу A_1. Одновременно сила трения F_2, действующая на тележку (и равная по модулю первой силе), совершает отрицательную работу A_2, по модулю большую, чем работа A_1, так как путь тележки s больше пути кирпича $s-l$ (l — путь

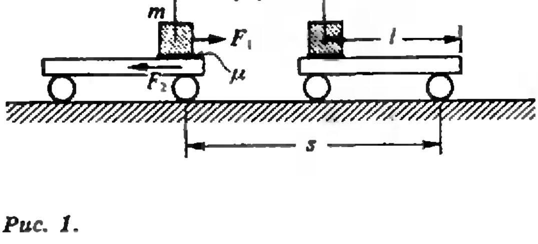


Рис. 1.

кирпича относительно тележки). Таким образом, получаем

$$A_1 = \mu mg(s-l),\ A_2 = -\mu mgs,$$

и полная работа сил трения

$$A_{тр} = A_1 + A_2 = -\mu mgl < 0.$$

Поэтому кинетическая энергия системы убывает (переходит в тепло):

$$\Delta E_k = -\mu mgl.$$

Этот вывод имеет общее значение. Действительно, работа двух сил (не только сил трения), осуществляющих взаимодействие между телами, не зависит от выбора системы отсчета (докажите это самостоятельно). Всегда можно перейти к системе отсчета, относительно которой одно из тел покоится. В ней работа силы трения, действующей на движущееся тело, всегда отрицательна, так как сила трения направлена против относительной скорости. Но она отрицательна и в любой другой системе отсчета. Следовательно, всегда, при любом количестве тел в системе, $A_{тр} < 0$. Эта работа и уменьшает механическую энергию системы.

2. О силе трения покоя. При действии между соприкасающимися телами силы трения покоя ни механическая, ни внутренняя (тепловая) энергия этих тел не изменяется. Значит ли это, что работа силы трения покоя равна нулю? Как и в первом случае, такое утверждение правильно только по отношению к полной работе сил трения покоя над всеми взаимодействующими телами. Одна

Рис. 2.

Рис. 3.

же отдельно взятая сила трения покоя может совершать работу, причем как отрицательную, так и положительную.

Рассмотрим, например, книгу, лежащую на столе в набирающем скорость поезде. Именно сила трения покоя сообщает книге такую же скорость, как у поезда, т. е. увеличивает ее кинетическую энергию, совершая определенную работу при этом. Другое дело, что такая же по модулю, но противоположная по направлению сила действует со стороны книги на стол, а значит, и на поезд в целом. Эта сила совершает точно такую же работу, но только отрицательную. В результате получается, что полная работа двух сил трения покоя равна нулю, и механическая энергия системы тел не меняется.

3. О движении автомобиля без проскальзывания колес. Самое устойчивое заблуждение связано именно с этим вопросом.

Пусть автомобиль вначале покоится, а затем начинает разгоняться (рис. 2). Единственной внешней силой, сообщающей автомобилю ускорение, является сила трения покоя $F_{тр}$, действующая на ведущие колеса (мы пренебрегаем силой сопротивления воздуха и силой трения качения). Согласно теореме о движении центра масс, импульс силы трения равен изменению импульса автомобиля:

$$F_{тр}\Delta t = \Delta(Mv_c) = Mv_c,$$

если скорость центра масс в начале движения равнялась нулю, а в конце v_c. Приобретая импульс, т. е. увеличивая свою скорость, автомобиль одновременно получает и определенную порцию кинетической энергии. А поскольку импульс сообщается силой трения, естественно считать, что и увеличение кинетической энергии определяется работой этой же силы. Вот это-то утверждение оказывается совершенно неверным. Сила трения ускоряет автомобиль, но работы при этом не совершает. Как же так?

Вообще говоря, ничего парадоксального в этой ситуации нет. В качестве примера достаточно рассмотреть совсем простую модель — гладкий кубик с прикрепленной сбоку пружинкой (рис. 3). Кубик придвигают к стене, сжимая пружинку, а затем отпускают. «Отталкиваясь» от стены, наша система (кубик с пружинкой) приобретает определенные импульс и кинетическую энергию. Единственной внешней силой, действующей по горизонтали на систему, является, очевидно, сила реакции стены $F_р$. Именно она и сообщает системе ускорение. Однако никакой работы при этом, конечно, не совершается — ведь точка приложения этой силы неподвижна (в системе координат, связанной с землей), хотя сила действует некоторое конечное время Δt.

Аналогичная ситуация возникает и при разгоне автомобиля без проскальзывания. Точка приложения силы трения, действующей на ведущее колесо автомобиля, т. е. точка соприкосновения колеса с дорогой, в любой момент покоится относительно дороги (в системе отсчета, связанной с дорогой). При движении автомобиля она исчезает в одной точке и сразу же появляется в соседней.

Не противоречит ли сказанное закону сохранения механической энергии? Конечно же, нет. В нашем случае с автомобилем изменение кинетической энергии системы происходит за счет ее внутренней энергии, выделяющейся при сгорании топлива.

Для простоты рассмотрим чисто механическую систему: игрушечный автомобиль с пружинным заводом. Двигатель такого автомобиля использует не внутреннюю энергию топлива, а потенциальную энергию сжатой пружины. Вначале пружина заведена, и ее потенциальная энергия E_{p1} отлична от нуля. Если двигатель игрушки — просто растянутая пружина, то $E_{p1}=$ $=k(\Delta l)^2/2$. Кинетическая энергия равна нулю, и полная начальная энергия автомобиля $E_1=E_{p1}$. В конечном состоянии, когда деформация пружины исчезнет, потенциальная энергия равна нулю, а кинетическая энергия $E_{k2}=Mv_c^2/2$. Полная энергия $E_2=E_{k2}$. Согласно закону сохранения энергии (трением мы пренебрегаем),

$$\frac{Mv_c^2}{2}=\frac{k(\Delta l)^2}{2}.$$

В случае реального автомобиля

$$\frac{Mv_c^2}{2}=\Delta U,$$

где ΔU — энергия, полученная при сгорании топлива.

Если колеса автомобиля проскальзывают, то $A_{тр}<0$, так как точка соприкосновения колес с дорогой движется против направления силы трения. Следовательно,

$$\frac{Mv_c^2}{2}=\frac{k(\Delta l)^2}{2}+A_{тр}.$$

Видно, что кинетическая энергия автомобиля в конечном состоянии оказывается меньше, чем в отсутствие проскальзывания.

Л. Кондрашева, С. Крюков, Г. Мякишев

Сила Ампера в однородном магнитном поле

Согласно закону Ампера, выражение для модуля силы $\vec{F}$, действующей на малый отрезок проводника Δl, по которому течет ток I, в магнитном поле с индукцией $\vec{B}$, имеет вид

$$F=BI\,\Delta l\sin\alpha.$$

Здесь α — угол между направлением магнитной индукции и направлением тока. Можно сказать также, что это угол между вектором $\vec{B}$ и вектором $\overline{\Delta l}$, направленным по току. Сила $\vec{F}$ направлена перпендикулярно векторам $\vec{B}$ и $\overline{\Delta l}$ — по известному правилу левой руки.

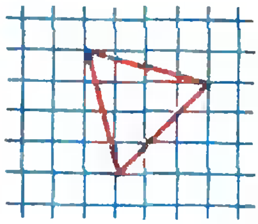
Чтобы найти силу, действующую на криволинейный участок проводника в произвольном магнитном поле, нужно:

(Окончание см. на с. 42)

Равносторонний треугольник

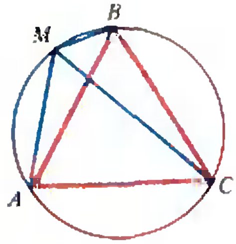
Среди треугольников равносторонний занимает особое место. Не только потому, что он — единственный, имеющий три оси симметрии. Во многих смыслах он является экстремальным среди остальных треугольников: при заданном периметре максимальная площадь будет у равностороннего треугольника, отношение радиуса вписанной окружности к радиусу описанной максимально также у равностороннего треугольника. И этот перечень можно было бы далеко продолжить.

Нарисовать равносторонний треугольник ничего не стоит, если под руками есть циркуль или чертежный угольник с углом в 60°. А если нет? Можно ли нарисовать равносторонний треугольник, расположив его вершины в узлах клетчатой бумаги? К сожалению, нет. Правда,



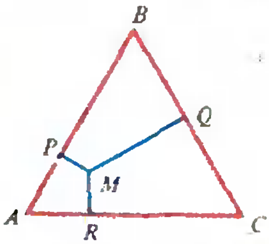
изображенный на рисунке треугольник очень близок к равностороннему — длины его сторон различаются меньше, чем на 3 %.

С равносторонним треугольником связано несколько удивительных соотношений, в справедливость которых сначала трудно поверить. Вот одно из них. Опишем вокруг равностороннего треугольника окружность и возьмем



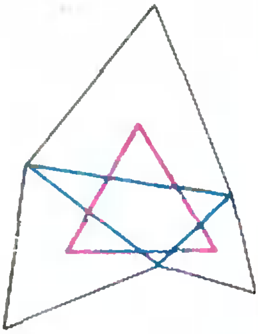
на ней произвольную точку M. Оказывается, что сумма расстояний от этой точки до ближайших вершин треугольника равна расстоянию до третьей вершины.

Теперь возьмем точку M внутри равностороннего треугольника и опустим из нее на стороны перпендикуляры MP, MQ и MR. Оказывается, что сумма этих отрезков не зависит от выбора точки M и равняется высоте треугольника. Кроме то-

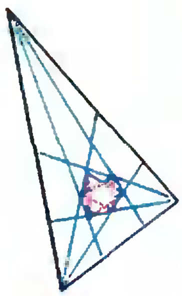


го, $AP+BQ+CR=BP+CQ+AR$, а их квадраты тоже равны: $AP^2+BQ^2+CR^2=BP^2+CQ^2+AR^2$.

Равносторонние треугольники неожиданным образом появляются и при рассмотрении свойств произвольных треугольников. Так Наполеон заметил, что если на сторонах произ-

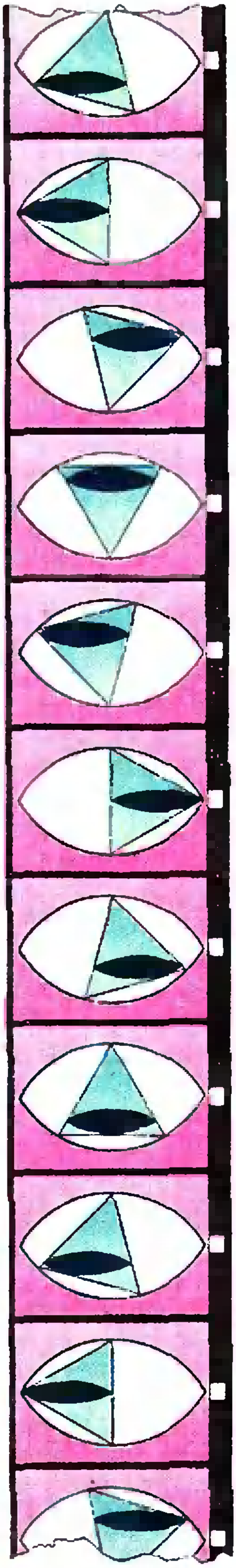


вольного треугольника во внешнюю сторону построить равносторонние треугольники, то их центры будут вершинами равностороннего треугольника. Этот факт верен и в том случае, если равносторонние треугольники строить внутрь данного.



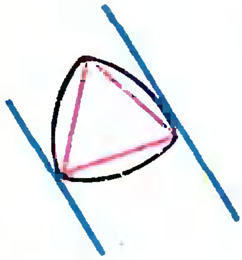
А Франк Морли в 1904 году обнаружил, что если в произвольном треугольнике провести из каждой вершины лучи, делящие эти углы на три равные части, то точки пересечения этих лучей являются вершинами двух равносторонних треугольников.

Неудивительно, что равносторонний треугольник можно поворачивать внутри описанной вокруг него окружности. Более неожиданной оказывается возможность поворачивать его внутри луночки, составленной из двух дуг окружности, каждая из которых равняется 120°, а радиус равен стороне треугольника.



Если же взять луночку из дуг вдвое меньшего размера (60°), а радиус равным высоте треугольника, то такую луночку можно вращать внутри этого треугольника, так, что она все время будет касаться всех его сторон.

Немецкий механик Франц Рело заметил, что если провести дуги окружностей с центрами в вершинах равностороннего треугольника, соединяющие две другие его вершины, то полученная замкнутая кривая



(она получила название *треугольник Рело*) будет обладать свойством постоянства ширины, т. е. расстояние между двумя параллельными касательными к этой кривой будет постоянной величиной, равной стороне треугольника.

В заключение вспомним о трех правильных многогранниках, составленных из равносторонних треугольников. Тетраэдре, составленном из 4 треугольников, по 3 в каждой вершине, октаэдре, составленном из 8 треугольников, по 4 в каждой вершине и икосаэдре, составленном из 20 треугольников, по 5 в каждой вершине.

Среди треугольников равносторонний обладает многими экстремальными свойствами. Так, при заданном периметре у равностороннего треугольника будут наибольшими площадь и радиус вписанного круга, а радиус описанного круга и сумма медиан будут наименьшими. Равносторонние треугольники мы видим и в переплетении стержней, образующих строительные конструкции — такие фермы являются наиболее прочными среди конструкций с заданным расходом металла.

Замощение плоскости равносторонними треугольниками навело известного нидерландского художника М. Эшера на идею картины «Свобода».

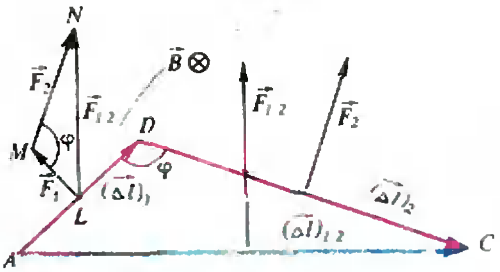


Рис. 1.

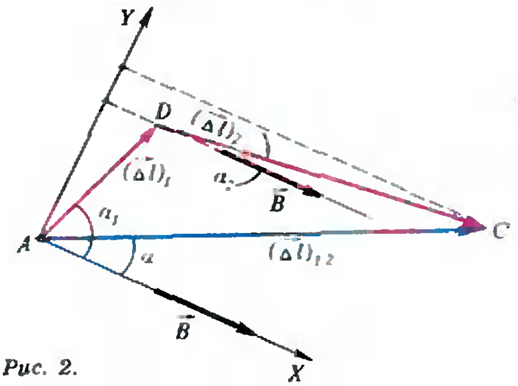


Рис. 2.

а) разбить его на отрезки, настолько малые, что их можно считать прямолинейными, а поле в этой области однородным;

б) определить силы Ампера, действующие на каждый такой отрезок;

в) вычислить векторную сумму полученных сил.

Разумеется этот «рецепт» известен каждому, кто изучал закон Ампера по школьному учебнику физики. Наша же задача — познакомить вас с весьма полезными свойствами силы Ампера, действующей на криволинейный участок проводника с током в простейшем магнитном поле — однородном.

Пусть проводник представляет собой пространственную (в частном случае плоскую) ломаную линию, состоящую из N прямолинейных отрезков $(\Delta l)_1$, $(\Delta l)_2$, ..., $(\Delta l)_N$. Просуммируем сначала силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, действующие на отрезки проводника $(\Delta l)_1$ и $(\Delta l)_2$.

Предположим, что вектор $\vec{B}$ перпендикулярен плоскости выбранных отрезков (рис. 1). Сила $\vec{F}_1$ перпендикулярна вектору $(\vec{\Delta l})_1$, а ее направление определяется правилом левой руки. Точно так же сила $\vec{F}_2$ перпендикулярна вектору $(\vec{\Delta l})_2$. Модули этих сил равны соответственно

$$F_1 = BI(\Delta l)_1 \text{ и } F_2 = BI(\Delta l)_2.$$

Сложим попарно силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ и отрезки $(\vec{\Delta l})_1$ и $(\vec{\Delta l})_2$. Поскольку $\angle LMN = \angle ADC$, как углы со взаимно перпендикулярными сторонами, треугольники LMN и ADC подобны, а вектор $\vec{F}_{12} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$ перпендикулярен вектору $(\vec{\Delta l})_{12}$, причем $F_{12} = BI(\Delta l)_{12}$. Следовательно, сила Ампера, действующая на участок проводника ADC, представляющий собой две стороны треугольника, равна силе Ампера, действующей на прямой отрезок проводника $(\Delta l)_{12}$ (третью сторону AC того же треугольника), если и в том и в другом проводнике текут одинаковые токи.

Рассмотрим теперь другой, тоже простой случай, когда вектор $\vec{B}$ лежит в плоскости отрезков проводника $(\Delta l)_1$ и $(\Delta l)_2$ (рис. 2). Направим ось координат X вдоль вектора $\vec{B}$, а ось Y — перпендикулярно ему. Силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ направлены от нас перпендикулярно плоскости рисунка — в соответствии с правилом левой руки. Суммарная сила $\vec{F}_{12}$ направлена так же, а ее модуль равен

$$F_{12} = F_1 + F_2 = BI(\Delta l)_1 \sin\alpha_1 + BI(\Delta l)_2 \sin\alpha_2 = BI(\Delta l)_{12y} = BI(\Delta l)_{12}\sin\alpha.$$

Здесь мы воспользовались тем, что сумма проекций на ось Y векторов $(\vec{\Delta l})_1$ и $(\vec{\Delta l})_2$ равна проекции суммарного вектора $(\vec{\Delta l})_{12}$.

Таким образом, в обоих рассмотренных нами случаях при вычислении силы Ампера два соседних прямолинейных отрезка проводника можно заменить одним, начало которого находится в начале первого отрезка, а конец — в конце второго.

Когда вектор $\vec{B}$ направлен под произвольным углом к плоскости отрезков проводника $(\Delta l)_1$ и $(\Delta l)_2$, его можно разложить на два взаимно перпендикулярных вектора, один из которых перпендикулярен упомянутой плоскости, а другой лежит в ней. Отсюда, а также из принципа суперпозиции магнитных полей следует, что и при вычислении силы Ампера, действующей на проводник в произвольно ориентированном магнитном поле, два соседних прямолинейных отрезка проводника $(\Delta l)_1$ и $(\Delta l)_2$ можно заменить одним $(\Delta l)_{12}$, соединяющим начало первого и конец второго. Точно так же два прямолинейных отрезка $(\Delta l)_{12}$ и $(\Delta l)_3$ можно заменить отрезком $(\Delta l)_{123}$. Продолжая замены, легко увидеть, что сила Ампера, действующая на рассматриваемый нами «ломаный» проводник, равна силе Ампера, действующей на прямолинейный проводник, если в проводниках текут одинаковые токи, а их концы совпадают. Это же справедливо и для криволинейного проводника, так как, неограниченно уменьшая длины прямолинейных отрезков ($\Delta l \to 0$) и одновременно неограниченно увеличивая их число ($N \to \infty$), ломаную линию можно превратить в гладкую (без изломов) кривую.

А теперь — об обещанных свойствах силы Ампера. Из всего сказанного следует, что сила Ампера, действующая на криволинейный участок проводника с током в однородном магнитном поле, не зависит от формы проводника, а зависит только от координат начала и конца этого участка. Следует также и то, что сила Ампера, действующая на замкнутый проводник с током в однородном магнитном поле, равна нулю. Эти два свойства силы Ампера взаимосвязаны — из первого следует второе и наоборот.

А. Лузин

«Недостающие» элементы

Когда в 1871 году Д. И. Менделеев предложил свою периодическую систему, химикам были известны 63 химических элемента. Менделеев предсказал существование еще 11 и даже отважился описать их свойства. В последующие шесть десятилетий, до 1925 года, было открыто и изучено 25 новых элементов, в их числе 8 из предугаданных Менделеевым. К этому времени стало известно, что между водородом и ураном должно разместиться 92 элемента и что место каждого из них определяется атомным номером. Остались незаполненными 4 места в таблице с номерами 43, 61, 85 и 87. Три из еще не обнаруженных элементов были описаны Менделеевым: элемент 43 (для краткости будем опускать слово «с номером») должен быть аналогом марганца («экамарганец» по Менделееву), элемент 85 — аналогом йода («экайод») и 87 — цезия («экацезий»).

В поисках этих «недостающих» элементов химики не жалели усилий, совершенствуя технику поисков и методов распознавания (идентификации). То и дело появлялись сообщения о новых открытиях. Так, в 1925 году было объявлено об открытии элемента 43, получившего и имя — мазурий. В 1931 году появились публикации об открытии элемента 85, которому один из открывателей дал название алабамий, другой — гельвеций. Сообщили и об открытии элемента 87 — виргиния. Не был забыт и элемент 61 — в разное время различные исследователи заявляли об открытии этого представителя группы редких земель, называли его и иллинием, и флоренцием, и циклонием. Оказалось, однако, что все это были открытия мнимые, ошибочные, не находившие подтверждения.

Казалось, природа, создавшая в ходе эволюции Вселенной 88 химических элементов, не «сумела» создать еще четыре, которые заполнили бы пустые места в таблице Менделеева. Почему?

Химики, безуспешно охотившиеся за неуловимыми элементами, не могли объяснить этот каприз природы. На помощь пришла физика, точнее, очень молодой тогда ее раздел — физика атомного ядра. Один из основных фактов ядерной физики таков: ядра атомов элементов в конце таблицы Менделеева, начиная с номера 84, радиоактивны, т. е. нестабильны. Объясняется это тем, что эти ядра содержат большое число протонов (атомный номер — это и есть число протонов в ядре), которые отталкиваются друг от друга. Правда, между всеми ядерными частицами существует так называемое сильное взаимодействие, имеющее характер притяжения, более сильного, чем электростатическое отталкивание. Но при большом числе протонов их взаимное отталкивание, противостоящее притяжению, делает ядро нестабильным.

Элементы 85 и 87 безусловно относятся к элементам нестабильным. Может быть, в этом именно и состоит причина отсутствия их в природе? А почему же тогда существуют семь других элементов из тех, что «за 84»? Ведь известно более 40 их радиоактивных изотопов.

Почему в природе нет элементов 85 и 87? Упомянутые 40 изотопов входят в состав трех так называемых радиоактивных семейств, начинающихся с трех радиоактивных элементов с очень большим периодом полураспада: $^{238}_{92}U$ ($T=4{,}5\cdot10^9$ лет), $^{235}_{92}U$ ($T=8\cdot10^8$ лет) и $^{232}_{90}Th$ ($T=1{,}4\cdot10^{10}$ лет). Ни уран, ни торий не успели распасться и исчезнуть за время существования Земли (около $4\cdot10^9$ лет), поэтому сохранились и их «потомки».

Кроме этих трех радиоактивных рядов, могло бы существовать и четвертое семейство. Могло бы, если бы его «родоначальник» имел достаточно большой период полураспада. Однако, как выяснилось, четвертое семейство начинается с изотопа нептуния $^{237}_{93}Np$, у которого T «всего» около 2 миллионов лет. Это значит, что он практически исчез с лица Земли. Исчезли и все его «потомки», среди которых значатся элементы 85 и 87.

А почему в природе нет элементов 43 и 61? Быть может, эти элементы тоже радиоактивны и потому не дожили до наших дней? Известны ведь радиоактивные элементы с номерами, меньшими 84, например — изотоп калия $^{40}_{19}K$, рения $^{187}_{75}Re$ и некоторые другие. Правда, у них очень большие периоды полураспада: у калия $T=1{,}4\cdot10^9$ лет, у рения $T=4\cdot10^{10}$ лет, что и обеспечивает «сохранность» их в земной коре. Но и у калия, и у рения есть и стабильные изотопы. Элементам же 43 и 61 «не повезло». Почему?

Чет и нечет в ядерной физике. Известно, что стабильность или нестабильность ядра зависит от соотношения между числом протонов и числом нейтронов в нем. Но не только от этого. Оказывается, ядро прочнее, стабильнее, если протоны или нейтроны, или и те и другие образуют в ядре па́ры. Для этого число протонов или нейтронов, или тех и других вместе должно быть четным. Наиболее стабильными ядрами являются те, у которых четное число и протонов, и нейтронов, как говорят, четно-четные ядра (например, ^4_2He, $^{16}_8O$). Менее стабильны ядра с четным числом протонов и нечетным нейтронов (четно-нечетные ядра) или наоборот (нечетно-четные ядра). Самыми нестабильными являются ядра с нечетным числом и протонов, и нейтронов (нечетно-нечетные ядра), среди них всего четыре стабильных ядра: ^2_1H, ^6_3Li, $^{10}_5B$ и $^{14}_7N$.

Это же соотношение между числом протонов и числом нейтронов в ядре определяет количество стабильных изотопов. У элементов с нечетными атомными номерами не бывает более двух стабильных изотопов. У элементов же с четными номерами стабильных изотопов может быть много. Олово, например, имеет десять стабильных изотопов, рубидий — семь и т. п.

Игра в «чет и нечет» приводит еще к одному следствию — не могут существовать два соседних стабильных изотопа с одинаковыми массовыми числами. А соседи элементов

43 и 61 имеют четные номера, и стабильных изотопов у них много. На долю заключенных между ними нечетных элементов стабильных «мест» просто не остается. Эти элементы могут быть только радиоактивными. И если периоды полураспада у них малые, то они и не сохранились в природе. Вот почему поиски химиков были тщетными.

Значит ли это, что четырем клеткам в таблице Менделеева самой природой суждено оставаться пустыми? Оказалось, нет. Физики сумели вдохнуть в эти элементы-тени жизнь. Вот как это произошло.

Элемент 43. Впервые этот элемент был получен облучением молибдена дейтронами (ядрами тяжелого водорода $^{2}_{1}H$). Честь открытия принадлежит К. Перрье и Э. Сегре (Италия, 1937 г.). Они дали ему и имя — технеций (Tc). Молибден — четный элемент, и он имеет много изотопов, так что при облучении должно было получиться и несколько изотопов технеция. Например:

$$^{96}_{42}Mo + ^{2}_{1}H \rightarrow ^{97}_{43}Tc + ^{1}_{0}n.$$

Это был первый искусственно полученный элемент, отсюда и название: от греческого technētós — искусственный. Вскоре изотоп технеция $^{99}_{43}Tc$ обнаружили, и притом в изобилии, среди продуктов деления урана в ядерных реакторах. Период полураспада у него составляет $2{,}12 \cdot 10^5$ лет, так что получать его можно килограммами. Технеций хорошо изучен и даже нашел практическое применение как замедлитель процессов коррозии. Известно большое число изотопов технеция. Самый долгоживущий — $^{97}_{43}Tc$ с периодом полураспада $2{,}6 \cdot 10^6$ лет.

Элемент 61. Среди многих десятков осколков деления урана в ядерных реакторах нашелся и элемент 61. В 1946 году Д. Маринский, Л. Гленденин и Ч. Корриелл выделили два изотопа элемента 61, которому они присвоили название прометий (Pm) — от имени Прометей. Изотопы эти — $^{147}_{61}Pm$ с $T = 2{,}6$ года и $^{149}_{61}Pm$ с $T = 2{,}2$ дня. Сейчас известны и другие изотопы. Самое большое значение T у изотопа $^{145}_{61}Pm$ — около 18 лет.

Элемент 85. Этот элемент впервые был получен в 1940 году при облучении висмута альфа-частицами (ядрами $^{4}_{2}He$) и из-за нестабильности назван астатом (At) от греческого ástatos — неустойчивый:

$$^{209}_{83}Bi + ^{4}_{2}He \rightarrow ^{211}_{85}At + 2^{1}_{0}n.$$

Период полураспада у него 7,5 часов. Из более чем 20 известных теперь изотопов астата наибольшее значение T у изотопа $^{210}_{85}At$ — 8,3 часа.

Элемент 87. Один из изотопов этого элемента с некоторой натяжкой можно назвать природным. О его открытии было впервые сообщено в 1939 году в работе М. Пере, давшей ему имя своего отечества — франций (Fr). «Нашла» она его среди продуктов распада одного из членов радиоактивного семейства $^{235}_{92}U$ — изотопа актиния $^{227}_{89}Ac$. Обычно эт бета-радиоактивный изотоп: испуская бета-частицу, он превращается в торий. Но 1 % его ядер испускает альфа-частицы и превращается во франций:

$$^{227}_{89}Ac \rightarrow ^{223}_{87}Fr + ^{4}_{2}He.$$

Этот-то 1 % и сумела «поймать» Пере. Период полураспада $^{223}_{87}Fr$ $T = 22$ минуты. Простой расчет показывает, что во всей земной коре содержится... около 500 грамм франция. (Для сравнения заметим, что урана в земной коре — тысячи миллиардов тонн.) В дальнейшем серией прямых опытов было показано, что франций и астат входят в состав радиоактивного семейства нептуния ($^{221}_{87}Fr$, испуская альфа-частицу, превращается в $^{217}_{85}At$). Позже было получено и много других изотопов франция, но у всех у них периоды полураспада меньше 22 минут.

А. Кикоин

Избранные школьные задачи по физике

9 класс

1. Две легкие тележки с массами m_1 и $m_2=3m_1$ соединены пружиной (рис. 1). Пружина сжата и связана нитью. Нить пережигают, пружина распрямляется, и тележки разъезжаются в противоположные стороны. Найдите отношение начальных скоростей тележек и отношение путей, пройденных тележками до остановки. Коэффициент трения для обеих тележек считать одинаковым.

2. Тело массой m_1 неупруго ударяется о покоящееся тело массой m_2. Найдите долю потерянной при этом кинетической энергии.

3. Шарик, имеющий массу $m_1=10$ г и скорость $v_1=10$ м/с, сталкивается с другим, летящим навстречу ему шариком массой $m_2=20$ г. После абсолютно упругого удара первый шарик движется в обратном направлении с той же по модулю скоростью. Определите скорость второго шарика после соударения.

4. Человек, стоящий на гладкой поверхности льда, бросает камень в горизонтальном направлении с высоты $H=1{,}8$ м. Камень падает на лед на расстоянии $l=9$ м от места бросания. Определите работу, которую совершил человек, бросив камень.

5. Небольшое тело соскальзывает вниз с высоты H по наклонному желобу, переходящему в «мертвую петлю» радиусом R (рис. 2). На какой высоте тело выпадет из «петли»? Трением пренебречь.

10 класс

6. Металлический круг радиусом R вращается вокруг своей оси с угловой скоростью ω. Определите показание вольтметра, соединенного с контактами, один из которых касается круга в центре, а другой — у края. Отношение заряда электрона к его массе равно γ. Сопротивление вольтметра считать очень большим.

7. Два неподвижных проводящих параллельных стержня, находящихся в горизонтальной плоскости на расстоянии $l=1$ м друг от друга, помещены в однородное магнитное поле, индукция которого равна $B=0{,}1$ Тл и направлена вертикально. На стержнях перпендикулярно к ним лежит металлический стержень массой $m=0{,}5$ кг. Определите ускорение этого стержня, если по нему течет ток $I=50$ А, а коэффициент трения между стержнями $\mu=0{,}2$.

8. Прямой проводник массой $m=50$ г и длиной $l=20$ см подвешен горизонтально с помощью двух невесомых нитей, привязанных к его концам. Проводник находится в однородном вертикальном магнитном поле, индукция которого $B=0{,}75$ Тл. Какой ток надо пропустить через проводник, чтобы он отклонился от положения равновесия и нити составили с вертикалью угол $\alpha=30°$ каждая?

9. Однородное магнитное поле, индукция которого $B=10$ мТл, направлено перпендикулярно однородному электрическому полю с напряженностью $E=17$ кВ/м. Ион, пройдя ускоряющую разность потенциалов $U=15$ кВ и влетев в область, занятую полями, со скоростью, перпендикулярной обоим полям, движется равномерно и прямолинейно. Определите отношение заряда к массе для этого иона.

10. Электрон, разогнанный в электрическом поле напряжением $U=20$ кВ, влетает в однородное магнитное поле с индукцией $B=0{,}1$ Тл. Вектор скорости электрона образует угол $\alpha=45°$ с направлением вектора магнитной индукции. Определите шаг винтовой линии, описываемой электроном.

11 класс (повторение)

11. На нити, могущей выдержать натяжение $T=40$ Н, равномерно вращают камень массой $m=1$ кг в вертикальной плоскости. С какой угловой скоростью необходимо вращать камень, чтобы нить оборвалась? Длина нити $l=1$ м.

12. На балкон, расположенный на высоте $H=6$ м, бросили с земли предмет массой $m=200$ г. Во время полета предмет достиг высоты $H'=8$ м от поверхности земли. Определите работу силы тяжести при полете предмета вверх, вниз и на всем пути.

13. Объем газа, находящегося под давлением $p=8$ МПа, при изобарном процессе увеличился на $\Delta V=0{,}5$ м^3. При этом газу было сообщено количество теплоты $Q=6$ МДж. На сколько изменилась внутренняя энергия газа? Нагрелся или охладился газ при этом?

14. Одинаковые по модулю, но разные по знаку заряды $q=10$ нКл расположены в двух вершинах равностороннего треугольника со стороной $a=1$ м. Найдите напряженность электрического поля в третьей вершине треугольника.

15. Три резистора с сопротивлениями $R_1=R_2=10$ Ом и $R_3=3$ Ом подключены к источнику с ЭДС $\mathscr{E}=10$ В (рис. 3). Ток в цепи $I=1$ А. Найдите внутреннее сопротивление источника и ток короткого замыкания.

Публикацию подготовила В. Тихомирова

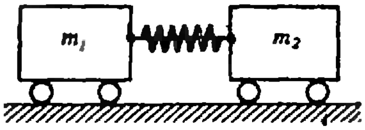


Рис. 1.

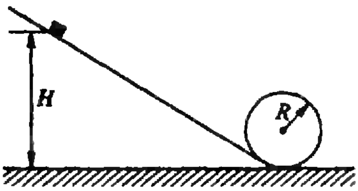


Рис. 2.

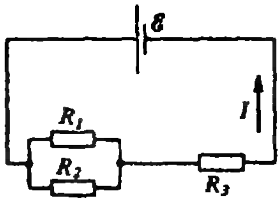


Рис. 3.

Математический кружок

Чертеж в стереометрических задачах

И. ШАРЫГИН

При решении стереометрических задач существенно возрастает роль чертежа. Чертеж не только выступает как полноправный элемент решения, но и весьма часто включается в метод решения, дает ключ к решению задачи. О некоторых видах таких задач будет рассказано в этой статье.

Прежде всего заметим, что пространственные тела можно разделить на две группы: «хорошие», удобные для изображения, и «плохие». К первой группе относятся треугольные призмы (в первую очередь правильные), параллелепипеды, треугольные и четырехугольные пирамиды. Ко второй — n-угольные ($n>4$) призмы и пирамиды, усеченные пирамиды и круглые тела, особенно сфера.

Один из весьма распространенных приемов состоит в том, что в заданной «неудобной» конструкции вычленяется в качестве ключевого элемента «хороший» многогранник. Такой пример дает

Задача 1. *Найдите двугранный угол между соседними боковыми гранями правильной шестиугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен* α.

Решение. Здесь удобно рассмотреть треугольную пирамиду — своего рода $1/6$ часть от данной,— вершинами которой являются концы высоты и одной стороны основания исходной пирамиды (рис. 1). В этой пирамиде $OB=OA$, $\angle BOA=60°$, SO перпендикулярна плоскости AOB, $\angle ASB=\alpha$. Двугранный угол между плоскостями ASB и OBS (или OAS) равен половине искомого угла (искомый угол φ). Опустим из A перпендикуляры AD и AK на BS и OB. Тода $\angle KDA=\varphi/2$ (докажите). Положив $OA=OB=R$, будем иметь

$$AK=R\frac{\sqrt{3}}{2},\ AB=R,\ AD=\frac{R}{\cos\frac{\alpha}{2}},$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{AK}{AD}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi=2\arcsin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Эта очень простая задача носит чисто иллюстративный характер.

Практически в каждой сколько-нибудь содержательной задаче по стереометрии возникают те или иные проблемы, связанные с чертежом. Можно выделить некоторые типичные приемы, используемые в соответствующих ситуациях. Так, например, в задачах, в которых фигурируют прямые и плоскости в пространстве, надо постараться «привязать» заданную конфигурацию к «хорошему» многограннику. Прямые и плоскости не должны «болтаться» в пространстве! Они должны быть связаны

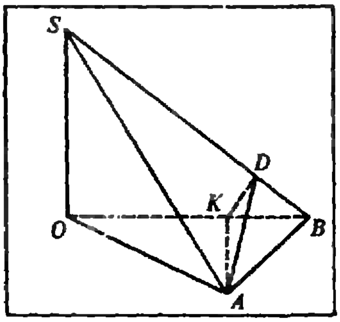


Рис. 1.

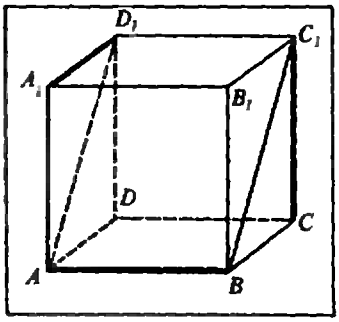


Рис. 2.

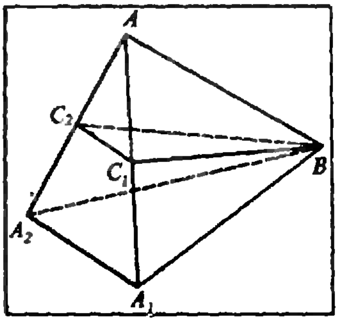


Рис. 3.

с каким-то многогранником, опираться на него, являться его элементами. Рассмотрим два примера на эту тему.

Задача 2. *В пространстве даны три попарно перпендикулярные прямые, расстояния между которыми равны 1. Найдите площадь параллелограмма, две вершины которого расположены на одной прямой, а две оставшиеся — на двух других прямых.*

Решение. В качестве опорного многогранника рассмотрим единичный куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 2). Прямые AB, CC_1 и D_1A_1 попарно перпендикулярны и находятся на расстоянии 1 друг от друга. Параллелограмм ABC_1D_1 (а точнее, прямоугольник) удовлетворяет условию задачи. Его площадь равна $\sqrt{2}$. Любой другой параллелограмм, удовлетворяющий условию, имеет такую же площадь. Докажите это самостоятельно.

Не так просто найти нужную интерпретацию в следующей задаче.

Задача 3. *На плоское зеркало под углом α падает луч света. Зеркало поворачивается на угол β вокруг проекции луча на зеркало. На какой угол отклонится отраженный луч?*

Решение. Идея решения в том, что мы не будем отражать наш луч по законам физики, а отразим его симметрично относительно зеркала по математическим правилам. Итак, пусть A — какая-то точка на падающем луче, B — точка падения луча на зеркало, A_1 и A_2 — точки, симметричные A соответственно относительно исходного зеркала и повернутого, C_1 — середина AA_1 (C_1 — проекция A на исходное зеркало), C_2 — середина AA_2 (рис. 3). Поскольку отраженные лучи представляют собой продолжения отрезков A_1B и A_2B, искомый угол равен углу A_1BA_2. Прямые AC_1 и AC_2 перпендикулярны соответственно данному зеркалу и повернутому. Значит, $\angle C_1AC_2 = \angle A_1AA_2 = \beta$. По условию $\angle ABC_1 = \alpha$. Если $AB = A_1B = A_2B = a$, то

$$AC_1 = a\sin\alpha,\ C_1C_2 = AC_1 \cdot \sin\beta = a\sin\alpha\sin\beta.$$

($\angle AC_2C_1 = 90^\circ$, так как C_1C_2 принадлежит повернутому зеркалу, а C_2 — проекция A на него). Значит, $A_1A_2 = 2C_1C_2 = 2a\sin\alpha\sin\beta$. Теперь в равнобедренном треугольнике A_1BA_2 мы знаем все стороны и легко найдем угол A_1BA_2. Он равен

$$2\arcsin(\sin\alpha\sin\beta).$$

Во многих задачах по стереометрии пространственный чертеж носит чисто иллюстративный характер (в некоторых случаях можно и вовсе обойтись без него), а вся работа ведется на плоском чертеже, представляющем собой либо какое-то сечение пространственной конструкции, либо специальным образом выбранную проекцию. В этой связи, раз уж мы повели разговор о прямых в пространстве, проиллюстрируем заодно и один специфический прием определения расстояния между скрещивающимися прямыми, основанный на ортогональном проектировании.

Задача 4. *В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра равны 1. Точки K и M соответственно середины AB*

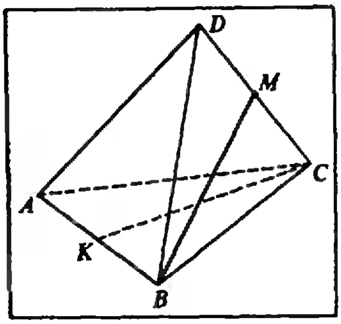


Рис. 4.

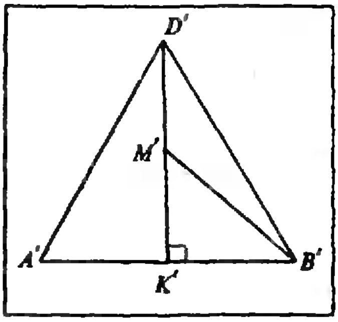


Рис. 5.

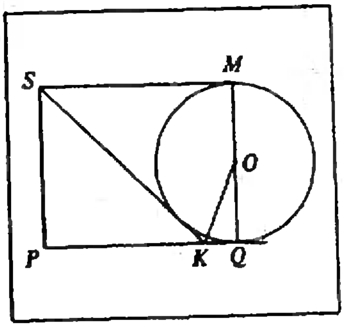


Рис. 6.

и DC. Найдите расстояние между прямыми CK и BM.

Решение. Рисунок 4 иллюстрирует задачу. Проведем через AB плоскость, перпендикулярную CK, и спроектируем нашу пирамиду на эту плоскость (рис. 5). При этом прямая CK спроектируется в точку K' — середину отрезка $A'B'=AB=1$. Высота $D'K'$ треугольника $A'B'D'$ равна высоте нашей пирамиды, т. е. $D'K'=\sqrt{2/3}$. M' — середина $D'K'$, является проекцией точки M. Расстояние между прямыми CK и BM равно расстоянию от точки K' до прямой $B'M'$ (почему?). Имеем простейшую планиметрическую задачу: найти высоту, опущенную на гипотенузу прямоугольного треугольника, катеты которого равны $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}}$ и $\frac{1}{2}$. Искомое расстояние равно $\frac{1}{\sqrt{10}}$.

Особая тема — чертежи в задачах про круглые тела. Здесь нередко можно (и нужно) обойтись вовсе без изображения самих тел, ограничившись изображением некоей скелетной конструкции, образованной их центрами, осями, точками, касательными и т. д. И если одинокие цилиндры или конусы иногда все же полезно изобразить, то по отношению к сфере сделанная рекомендация практически не имеет исключений.

Например, вполне типичная ситуация — четыре равные, попарно касающиеся сферы,— иллюстрируется треугольной пирамидой, все ребра которой равны диаметрам этих сфер. Вершины этой пирамиды суть центры данных сфер.

Иногда приходится и вовсе обходиться одними плоскими (не проекционными) чертежами, удерживая пространственную конфигурацию в голове, поскольку ее изображение далеко выходит за рамки графических возможностей нормального человека. Например:

Задача 5. *Четыре равные шара касаются плоскости, а каждый шар касается двух соседних. Рассмотрим конус, основание которого расположено в плоскости, касающейся данных шаров, высота равна диаметру этих шаров, а боковая поверхность касается каждого шара. Найдите отношение объемов конуса и шара.*

Решение. Если R — радиус каждого шара, то центры шаров образуют квадрат со стороной $2R$. Для решения задачи вполне достаточно рисунка 6, на котором SP — ось конуса, MQ — диаметр одного из шаров (Q — точка касания шара с плоскостью), SK — образующая конуса, касающаяся шара. Более того, мы могли бы не изображать и окружность, по которой плоскость SPO пересекает шар. Понятно, что $SM=R\sqrt{2}$ как половина диагонали квадрата со стороной $2R$. Если $\angle MSO=\varphi$, то $\operatorname{tg}\varphi=\frac{1}{\sqrt{2}}$. Значит, $\angle PSK=90°-2\varphi$ и $PK=2R\operatorname{tg}(90°-2\varphi)=R\frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{\operatorname{tg}\varphi}=R\frac{1}{\sqrt{2}}$. Теперь нетрудно найти искомое отношение, оно равно $\frac{1}{4}$.

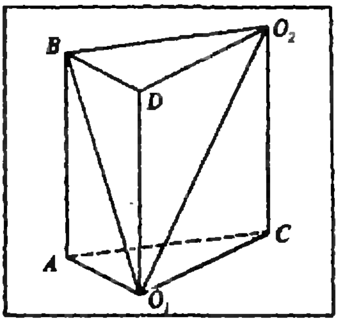


Рис. 7.

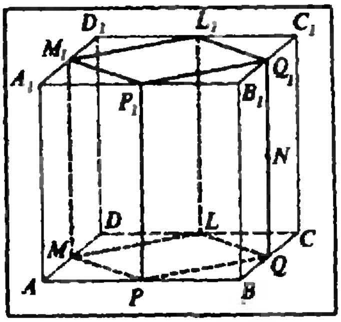


Рис. 8.

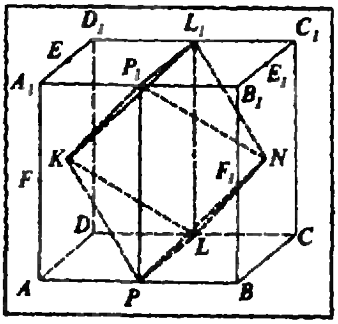


Рис. 9.

В следующей задаче основная проблема (как и в задаче 4) — найти нужную графическую интерпретацию.

Задача 6. *Два шара радиусами 1 и 3 касаются друг друга внешним образом. Через точку M, расположенную на расстоянии 3 от центра меньшего шара, проведены две прямые, касающиеся обоих шаров. Найдите угол между касательными, если известно, что одна из них образует угол 45° с прямой, проходящей через центры шаров.*

Решение. Обозначим центры шаров соответственно через O_1 и O_2, а через A и B — точки касания с ними той касательной, которая образует угол 45° с прямой O_1O_2. А теперь достроим эту конструкцию до треугольной призмы O_1ACDBO_2 (рис. 7). Поскольку ребро AB перпендикулярно ребрам AO_1 и BO_2, то эта призма — прямая. В прямоугольнике O_1CO_2D диагональ O_1O_2 образует угол в 45° с ребром O_1D, следовательно, этот прямоугольник является квадратом. Его диагональ $O_1O_2=4$, значит, сторона этого квадрата равна $2\sqrt{2}$. Основания нашей призмы — прямоугольные треугольники с прямыми углами при вершинах O_1 и D ($O_1C^2=9-1=AC^2-AO_1^2$). Точка M, по условию, расположена на расстоянии 3 от O_1 на прямой AB. Но $O_1B=3$. Таким образом, возникают два случая: 1) M совпадает с B; 2) M симметрична B относительно точки A.

Далее заметим, что вторая касательная симметрична AB относительно плоскости MO_1O_2. Следовательно, угол между касательными равен удвоенному углу между одной из них и плоскостью MO_1O_2 (или дополняет этот угол до 180°).

Рассмотрим первый случай: M совпадает с B. Нам надо найти угол между прямой BA и плоскостью BO_1O_2. Этот угол равен углу между DO_1 и плоскостью BO_1O_2. Рассмотрим треугольную пирамиду BDO_1O_2. Ее объем равен $\frac{1}{6}BD\cdot DO_2\cdot DO_1=\frac{4}{3}$. Возьмем теперь за основание треугольник BO_1O_2: $BO_2=3$, $BO_1=3$, $O_1O_2=4$. Площадь BO_1O_2 равна $2\sqrt{5}$. Если h — высота, опущенная из D на BO_1O_2, то $\frac{2}{3}\sqrt{5}h=\frac{4}{3}$. Из этого уравнения найдем $h=\frac{2}{\sqrt{5}}$. Таким образом, синус угла между DO_1 и плоскостью BO_1O_2 равен $\frac{1}{\sqrt{10}}$. Значит, $\frac{\alpha}{2}=\arcsin\frac{1}{\sqrt{10}}$ (или $\operatorname{arctg}\frac{1}{3}$), где α — искомый угол.

Второй случай рассмотрите самостоятельно. Впрочем, можно сообразить, что во втором случае ответ такой же, как и в первом. Это следует из того, что AO_1 — общий перпендикуляр между AB и O_1O_2, а точки M, соответствующие каждому случаю, симметричны относительно A.

Хочу подчеркнуть, что построение чертежа — это не единичная акция, предшествующая решению задачи, а процесс, включенный в решение, и нередко сопровождающий все решение от начала до конца.

В него могут входить изображение общей ситуации, отдельных ее фрагментов, специальных сечений и проекций. Иногда полезно выстраивать последовательность чертежей, изменяющихся одновременно с развитием сюжета задачи, а также с появлением новых знаний об изучаемой конфигурации в процессе решения, создавая своеобразный чертеж-мультфильм. (К сожалению, во многих учебных пособиях решения задач сопровождаются итоговым чертежом, а вся динамика его развития остается «за кадром».) Частично подтверждением этого может служить следующая задача.

Задача 7. *Найдите объем общей части трех правильных четырехугольных призм, вписанных в единичный куб так, что вершинами каждой призмы служат середины ребер этого куба.*

Решение. Попробуем разобраться в ситуации постепенно, последовательно вписывая в куб три призмы. Рассмотрим куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (первый кадр нашего мультфильма, который мы из экономии журнального места не изображаем). Впишем в него призму $PQLMP_1Q_1L_1M_1$ (рис. 8). Теперь рассмотрим призму с основаниями на гранях ABB_1A_1 и DCC_1D_1. Понятно, что боковая грань этой призмы, проходящая через P, L и середины BB_1 и CC_1, отсечет от первой призмы «уголок» при вершине Q, представляющий собой треугольную пирамиду $PQLN$, где N — середина QQ_1. Точно так же отрезаются уголки при вершинах Q_1, M и M_1. В результате получаем многогранник PLL_1P_1KN (рис. 9). Теперь надо добавить третью призму с основаниями на гранях BCC_1B_1 и ADD_1A_1 и отсечь от полученного многогранника все, выходящее за границы третьей призмы. Поскольку попытка изобразить эту общую часть трех призм на одном чертеже приводит к чрезмерной перегрузке чертежа и потере наглядности, попробуем проделать эту операцию умозрительно. Общая часть двух призм есть объединение двух правильных четырехугольных пирамид с общим основанием PLL_1P_1. Этот же многогранник (октаэдр) можно рассматривать и как объединение двух (не правильных) четырехугольных пирамид с основанием PNL_1K. Грань третьей призмы, проходящей через точки F, E, F_1, E_1 — середины ребер куба AA_1, A_1D_1, BB_1, B_1C_1, пересечет боковые ребра P_1P, P_1K, P_1L_1, P_1N пирамиды PKL_1NP_1 в их серединах, а следовательно, эта грань отсечет $1/8$ объема этой пирамиды или $1/16$ объема октаэдра PKL_1NP_1L. То же самое можно утверждать относительно каждой из трех других боковых граней третьей призмы. Значит, третьей призмой отсекается $1/4$ объема октаэдра PLL_1P_1KN, а общая часть всех трех призм имеет объем, равный $3/4$ его объема, т. е. объем части равен $3/4 \cdot 1/3 = 1/4$.

Задачи для самостоятельного решения.

1. Дан двугранный угол величиной α. В плоскости одной грани проведена прямая, перпендикулярная ребру этого двугранного угла, а в плоскости другой грани проведена прямая, образующая угол β с ребром. Чему равен угол между этими прямыми?

2. Плоский угол α повернут на угол β вокруг своей биссектрисы. На какой угол повернулись стороны угла?

3. В пространстве расположены три прямые и плоскость такие, что все попарные углы между ними (между парами прямых, а также между каждой прямой и плоскостью) равны между собой. Найдите эти углы.

4. В треугольной пирамиде $ABCD$ все ребра равны 1. Точки K и M соответственно середины ребер AB и BC. Найдите угол и расстояние между прямыми CK и DM.

5. Внутри конуса находятся четыре шара равных радиусов. Три шара касаются его основания, каждый шар касается боковой поверхности конуса, кроме того, каждый шар касается трех других. Найдите угол при вершине осевого сечения конуса.

6. Две противоположные вершины куба совпадают с центрами оснований цилиндра, а остальные лежат на боковой поверхности цилиндра. Найдите отношение объемов цилиндра и куба.

7. На прямой l расположены центры трех шаров радиусами 1, 2 и 5, причем шар радиусом 2 касается двух других внешним образом. Прямая p касается всех трех шаров. Найдите угол и расстояние между прямыми l и p.

8. Найдите объем общей части шести правильных четырехугольных пирамид, основание каждой из которых совпадает с гранью данного единичного куба, а противоположная вершина принадлежит противоположной грани куба.

МУЗЫКА, ЗВУЧАЩАЯ В КРОВИ

(фантастический рассказ)

Г. БИР

В природе существует принцип, который, мне думается, никто до сих пор не подметил... Каждый час рождаются и умирают миллиарды триллионов маленьких живых существ — бактерий, микробов, «микроскопических животных», и жизнь каждого из них не имеет особого значения, разве что в совокупности с множеством других таких же существ, когда их крошечные деяния суммируются и становятся заметны. Они мало что чувствуют. Практически не страдают. И даже смерть сотни миллиардов не может сравниться по своей значимости со смертью одного-единственного человека.

В ряду огромного количества живых существ на Земле от мельчайших микробов до таких крупных созданий, как люди, существует определенное равновесие — примерно так же, как масса собранных вместе ветвей высокого дерева равна массе сучьев, расположенных внизу, а масса всей кроны равна массе ствола.

Таков по крайней мере принцип. И я думаю, что первым его нарушил Верджил Улэм.

Мы не виделись с ним около двух лет. И его образ, сохранившийся у меня в памяти, лишь весьма отдаленно напоминал загорелого, хорошо одетого джентльмена, что стоял передо мной. За день до этого мы договорились по телефону, что встретимся во время ленча, и теперь разглядывали друг друга, остановившись прямо в дверях кафетерия для сотрудников медицинского центра «Маунт фридом».

— Верджил? — неуверенно спросил я. — Боже, неужели это ты?!

— Рад тебя видеть, Эдвард, — произнес он и крепко пожал мою руку.

За время, прошедшее с нашей последней встречи, он сбросил десять или двенадцать килограммов, а то, что осталось, казалось теперь жестче и сложено было гораздо пропорциональнее. С университетских лет Верджил запомнился мне совсем другим: толстый, рыхлый, лохматый умник с кривыми зубами. Нередко он развлекался тем, что подводил электричество к дверным ручкам или угощал нас пуншем, от которого все потом мочились синим. За годы обучения Верджил почти не встречался с девушками — разве что с Эйлин Термаджент, которая весьма напоминала его внешне.

— Ты выглядишь великолепно, — сказал я. — Провел лето в Кабо-Сан-Лукас?

Мы встали в очередь и выбрали себе закуски.

— Загар, — ответил он, ставя на поднос картонный пакет шоколадного молока, — это результат трех месяцев под ультрафиолетовой лампой. А зубы я выправил вскоре после того, как мы виделись в последний раз. Я тебе все объясню, но только давай найдем место, где к нам не будут прислушиваться.

Я повел его в угол для курильщиков: на шесть столиков таких оказалось только трое.

— Слушай, я серьезно говорю, — сказал я, пока мы переставляли тарелки с подносов на стол. — Ты здорово изменился. И действительно выглядишь очень хорошо.

— На самом деле я так изменился, как тебе и не снилось, — эту фразу он произнес зловещим тоном, словно актер из фильма ужасов, и карикатурно поднял брови. — Как Гэйл?

— Гэйл в порядке, — сказал я ему, — учит ребятишек в детском саду. Мы поженились год назад. — Верджил перевел взгляд на тарелки — кусок ананаса, домашний сыр, пирог с банановым кремом — и спросил надтреснутым голосом:

— Ты ничего больше не замечаешь?

— М-м-м, — произнес я, пристально вглядываясь в него.

— Смотри внимательно.

— Я не уверен... Хотя да, ты перестал носить очки. Контактные линзы?

— Нет. Они мне больше просто не нужны.

Пер. изд.: Bear G. Blood Music: в сб. The Year's Best SF: First Annual Collection.— New York: Bluejay Books, 1984.

— И ты стал довольно ярко одеваться. Кто это проявляет о тебе столько заботы? Надеюсь, у нее не только хороший вкус, но и внешность.

— Кандис тут ни при чем,— ответил он.— Просто я устроился на хорошую работу и могу теперь позволить себе пошвырять деньгами. Очевидно, мой вкус в выборе одежды лучше, чем в выборе еды.— На лице его появилась знакомая виноватая улыбка, потом она вдруг сменилась странной ухмылкой.— В любом случае, она меня бросила. С работы меня тоже уволили, так что теперь я живу на сбережения.

— Стоп, стоп!— запротестовал я.— Не все сразу. Давай рассказывай по порядку. Ты устроился на работу. Куда?

— В «Генетрон корпорейшн»,— сказал он.— Шестнадцать месяцев назад.

— Никогда не слышал.

— Еще услышишь. В следующем месяце они выбрасывают акции на рынок. Им удалось здорово продвинуться вперед с мебами. С медицинскими...

— Я знаю, что такое меб,— перебил его я.— Медицинский биочип.

— Они наконец получили работающие мебы.

— Что?— Теперь настала моя очередь удивленно поднимать брови.

— Микроскопические логические схемы. Их вводят в кровь, они закрепляются, где приказано, и начинают действовать. С одобрения доктора Майкла Бернарда.

Это уже значило не мало — Бернард обладал безупречной научной репутацией. Помимо того что его имя связывали с крупнейшими открытиями в генной инженерии, он до своего ухода на отдых по крайней мере раз в году вызывал сенсации работами в области практической нейрохирургии. Фотографии на обложках «Тайм», «Мега» и «Роллинг стоун» уже говорят сами за себя.

— Вообще-то это держится в строгом секрете — акции, прорыв в исследованиях, Бернард и все такое.— Он оглянулся по сторонам и, понизив голос, добавил:— Но ты можешь поступать, как тебе вздумается. У меня с этими паразитами больше никаких дел.

Я присвистнул:

— Этак можно здорово разбогатеть, а?

— Если тебе этого захочется. Но все-таки посиди немного со мной, прежде чем бросаться сломя голову к своему биржевому маклеру.

— Конечно.

К сыру и пирогу он даже не притронулся, однако съел ананас и выпил шоколадное молоко.

— Ну, рассказывай.

— В медицинском колледже я готовился к исследовательской работе. Биохимия. Кроме того, меня всегда тянуло к компьютерам. Так что последние два года учебы я содержал себя тем...

— Что писал матобеспечение для «Вестингхауза».

— Приятно, когда друзья помнят... Короче, именно так я и связался с «Генетроном» — они тогда только начинали, хотя уже располагали сильной финансовой поддержкой и лабораториями на все случаи жизни. Меня приняли на работу, и я быстро продвинулся. Спустя четыре месяца я уже вел собственную тему, и мне кое-что удалось сделать.— Он беззаботно махнул рукой.— А затем я увлекся побочными исследованиями, которые они сочли преждевременными. Но я упирался, и в конце концов у меня отобрали лабораторию. Передали ее какому-то слизняку. Часть результатов мне удалось спасти и скрыть еще до того, как меня вышибли, но, видимо, я был не очень осторожен... или рассудителен. Так что теперь работа продолжается вне лаборатории.

Я всегда считал Верджила человеком амбициозным, слегка тронутым и не особенно тонким. Его отношения с начальством и вообще с властями не складывались гладко. Наука для Верджила всегда была словно недоступная женщина, которая вдруг раскрывает перед человеком объятия, когда он еще не готов к зрелому проявлению чувств, заставляя его бояться, что он упустит свой шанс, потеряет представившуюся возможность, наделает глупостей. Видимо, так и случилось.

— Вне лаборатории? Что ты имеешь в виду?

— Эдвард, я хочу, чтобы ты меня обследовал. Мне нужно очень тщательное физиологическое обследование. Может быть, с применением методов диагностики рака. Тогда я смогу объяснить дальше.

— Стандартное обследование за пять тысяч?

— Все, что сможешь. Ультразвук, ядерный магнитный резонанс, термограммы и все остальное.

— Я не уверен, что получу доступ ко всему этому оборудованию. Магнитный резонанс вообще используют в обследованиях всего месяц или два. Черт, более дорогой метод и выбрать-то...

— Тогда только ультразвук. Этого хватит.

— Верджил, я всего лишь акушер, а не прославленный ученый. Гинеколог, излюбленная мишень анекдотов. Вот если ты вдруг начнешь перерождаться в женщину, тогда я смогу тебе помочь.

Он наклонился вперед, едва не ткнувшись локтем в пирог, но в последний момент отклонил руку и опустил локоть буквально в миллиметре от тарелки. Прежний Верджил вляпался бы в самый центр.

— Ты проведи тщательное обследование, и тогда...— Он прищурил глаза и покачал головой.— Пока просто проверь меня.

— Ладно, я запишу тебя на ультразвук. Кто будет платить?

— «Голубой щит».— Он улыбнулся и достал медицинскую кредитную карточку.— Я проник в компьютерные досье «Генетрона» и кое-что там поменял. Так что любые счета за медицинское обслуживание в пределах ста тысяч долларов они оплатят без вопросов и даже ничего не заподозрят.

Верджил настаивал на полной секретности, и я предпринял соответствующие меры. Его бланки, во всяком случае, я заполнил сам. Так что до тех пор, пока счета оплачиваются, практически всю работу можно было провести без постороннего вмешательства. За свои услуги я денег с него не брал. В конце концов, он и меня поил тем самым пуншем, от которого моча окрашивалась в голубой цвет. Можно сказать, старые добрые друзья.

Пришел Верджил поздно вечером. В это время я обычно уже не работаю, но на этот раз остался в институте, дожидаясь его на третьем этаже корпуса, который медсестры в шутку называют отделением Франкенштейна. Когда он появился, я восседал в пластиковом оранжевом кресле. Под светом флюоресцентных ламп лицо Верджила приобрело странный зеленоватый оттенок.

Раздевшись, он лег на смотровой стол, и прежде всего я заметил, что у него распухли лодыжки. Однако мышцы в этих местах оказались нормальными, плотными на ощупь. Я проверил несколько раз, и, судя по всему, никаких аномалий там не было, просто выглядели они очень необычно.

Озадаченно хмыкнув, я обработал переносным излучателем труднодоступные для большого аппарата места и запрограммировал полученные данные в видеоустройство. Потом развернул стол и задвинул его в эмалированный лаз ультразвуковой диагностической установки, в «пасть», как говорят наши медсестры.

Увязав данные установки с данными переносного излучателя, я выкатил Верджила обратно, затем включил экран. После секундной задержки там постепенно проступило изображение его скелета.

Спустя еще три секунды, которые я просидел с отвисшей челюстью, на экране возникло изображение торакальных органов, затем мускулатуры, системы кровеносных сосудов и наконец кожи.

— Давно ты попал в аварию?— спросил я, пытаясь унять дрожь в голосе.

— Ни в какую аварию я не попадал,— ответил он.— Все это сделано сознательно.

— Тебя что, били, чтобы ты не выбалтывал секретов?

— Ты не понимаешь, Эдвард. Взгляни на экран еще раз. У меня нет никаких повреждений.

— А это? Здесь какая-то припухлость.— Я показал на лодыжки.— И ребра у тебя... Они все переплетены крест-накрест. Очевидно, они когда-то были сломаны и...

— Посмотри на мой позвоночник,— сказал он.

Я перевернул изображение на экране. Боже правый! Фантастика! Вместо позвоночника — решетка из треугольных отростков, переплетенных совершенно непонятным образом. Протянув руку, я попытался прощупать позвоночник пальцами. Он поднял руки и уставился в потолок.

— Я не могу найти позвоночник,— сказал наконец я.— Спина совершенно гладкая.

Повернув Верджила лицом к себе, я попробовал нащупать через кожу ребра. Оказалось, они покрыты чем-то плотным и упругим. Чем сильнее я нажимал пальцем, тем больше становилось сопротивление. Но тут мне в глаза бросилась еще одна деталь.

— Послушай,— сказал я.— У тебя совершенно нет сосков...

В том месте, где им полагалось быть, остались только два пигментных пятнышка.

— Вот видишь!— произнес Верджил, натягивая белый халат.— Меня перестраивают изнутри.

Кажется, я попросил его рассказать, что произошло. На самом деле я не очень хорошо помню, что именно тогда сказал.

Он начал объяснять в своей привычной манере — то и дело сбиваясь на посторонние темы и уходя в сторону. Слушать его — все равно что продираться к сути дела через газетную статью, чрезмерно напичканную иллюстрациями и вставками в рамочках. Поэтому я упрощаю и сокращаю его рассказ.

В «Генетроне» ему поручили изготовление первых биочипов, крошечных электронных схем, состоящих из белковых молекул. Некоторые из них подключались к кремниевым чипам размером не больше микрона, затем запускались в артериальную систему крыс. Они должны были укрепиться в отмеченных химическим способом местах и вступить во взаимодействие с тканями, чтобы сообщать о созданных в лабораторных условиях патологических нарушениях или даже оказывать на них влияние.

— Это уже большое достижение!— сказал Верджил.— Наиболее сложный чип мы извлекли, пожертвовав подопытным животным, затем считали его содержимое, подключив к видеоэкрану. Компьютер выдал нам гистограммы, затем химические характеристики отрезка кровеносного сосуда, а потом сложил все это вместе и выдал картинку. Мы получили изображение одиннадцати сантиметров крысиной артерии. Видел бы ты, как все эти серьезные ученые прыгали до потолка, хлопали друг друга по плечам и глотали «клоповник»!

«Клоповник» — это этиловый спирт, смешанный с газировкой «Доктор Пеппер».

В конце концов кремниевые элементы полностью уступили место нуклеопротеидам. Верджил не очень хотел вдаваться в подробности, но я понял, что они нашли способ превращать большие молекулы — как ДНК или даже более сложные — в электрохимические компьютеры, использующие структуры типа рибосом в качестве кодирующих и считывающих устройств, а РНК — в качестве «ленты». Позже, внося программные изменения в ключевых местах путем замены нуклеотидных пар, Верджилу удалось скопировать репродуктивное деление и слияние.

— В «Генетроне» хотели, чтобы я переключился на супергенную инженерию, поскольку этим занимались все подряд. Самые разные монстры, каких только можно вообразить, и так далее... Но у меня были другие идеи. Время безумных ученых, верно?— Он покрутил пальцем у виска, издав плавно переливающийся звук, потом рассмеялся, но тут же умолк.— Чтобы облегчить процесс дупликации и соединения, я вводил свои самые удачные нуклеопротеиды в бактерии. Затем стал оставлять их там на длительное время, чтобы схемы могли взаимодействовать с клеточными механизмами. Все они были запрограммированы эвристически, то есть они самообучались в гораздо большем объеме, чем в них закладывали изначально. Клетки скармливали химически закодированную информацию компьютерам, а те в свою очередь обрабатывали ее, принимали решения, и таким образом клетки «умнели». Ну, для начала, скажем, становились такими же умными, как планарии. Представь себе E. coli*), которая не глупее планарии, а?

— Представляю,— кивнул я.

— Ну, а потом я совсем увлекся. Оборудование было, технология уже существовала, и я знал молекулярный язык. Соединяя неклеопротеиды, я мог получить действительно плотные и сложные биочипы, своего рода маленькие мозги. Пришлось исследовать и такую проблему: чего я смогу достичь — теоретически? Получалось, что, продолжая работать с бактериями, я бы сумел получить биочип, сравнимый по производительности обработки информации с мозгом воробья. Можешь себе представить мое удивление? Но потом мне открылся способ тысячекратного увеличения производительности, причем с помощью того же явления, которое мы прежде считали помехой — электронного дрейфа между сложившимися электронными схемами. При таких размерах даже незначительные флуктуации грозили биочипу уничтожением, но я разработал программу, которая предсказывала и обращала туннельный эффект в преимущество. Тем самым, подчеркивая эвристический аспект этих компьютеров, я использовал дрейф для увеличения сложности.

— Тут я уже перестаю понимать,— признался я.

— Я воспользовался преимуществом, которое дает элемент случайности. Схемы могли самовосстанавливаться, сравнивая содержимое памяти и исправляя поврежденные элементы. Целиком. Я дал им только базовые инструкции. Живите и размножайтесь! Становитесь лучше! Боже, ты бы видел, что стало с некоторыми культурами через неделю! Потрясающие результаты! Они начали развиваться сами по себе, словно маленькие города. Пришлось их все уничтожить. Особенно меня поразила одна чашка Петри: думаю, если бы я продолжал кормить ее жильцов, она отрастила бы ноги и дала ходу из инкубатора.

— Ты, надо понимать, шутишь?— спросил я, взглянув на него в упор.— Или нет?

— Слушай, они действительно знали, что значит становиться лучше, совершеннее. Они видели направление развития,

* Escherichia coli — кишечная бактерия.

но, находясь в телах бактерий, были очень ограниченны в ресурсах.

— И насколько они оказались умны?

— Я не уверен. Они держались скоплениями по сто — двести клеток; и каждое скопление вело себя как самостоятельная особь. Может быть, каждое из них достигло уровня макаки-резуса. Они обменивались информацией через фимбрии — передавали участки памяти и сравнивали результаты своих действий. Хотя наверняка их сообщество отличалось от группы обезьян прежде всего потому, что мир их был намного проще. Но зато в своих чашках они стали настоящими хозяевами. Я туда запускал фагов — так им просто не на что было рассчитывать. Мои питомцы пользовались любой возможностью вырасти и измениться.

— Как это возможно?

— Что? — Он, похоже, удивился, что я не все принимаю на веру.

— Запихнуть так много в столь малый объем. Макака-резус это все-таки нечто большее, чем просто калькулятор, Верджил.

— Возможно, я не очень хорошо объяснил, — сказал он, заметно раздражаясь. — Я использовал нуклеопротеидные компьютеры. Они похожи на ДНК, но допускают интерактивный обмен. Ты знаешь, сколько нуклеотидных пар содержится в организме одной-единственной бактерии?

Последнюю свою лекцию по биохимии я слушал уже довольно давно и поэтому только покачал головой.

— Около двух миллионов. Добавь сюда пятнадцать тысяч модифицированных рибосом — каждая с молекулярным весом около трех миллионов — и представь себе возможное количество сочетаний и перестановок. РНК выглядит как длинная спираль из бумажной ленты, окруженная рибосомами, которые считывают инструкции и вырабатывают белковые цепи. — Слегка влажные глаза Верджила буквально светились. — Кроме того, я же не говорю, что каждая клетка была отдельной особью. Они действовали сообща.

— Сколько бактерий ты уничтожил в чашках Петри?

— Не знаю. Миллиарды. — Он усмехнулся. — Ты попал в самую точку, Эдвард. Как планета, населенная E. coli.

— Но тебя не за это уволили?

— Нет. Прежде всего они не знали, что происходит. Я продолжал соединять молекулы, увеличивая их размеры и сложность. Поняв, что бактерии слишком ограничены, я взял свою собственную кровь, отделил лейкоциты и ввел в них новые биочипы. Потом долго наблюдал за ними, гоняя по лабиринтам и заставляя справляться с химическими проблемами. Они показали себя просто великолепно. Время на их уровне течет гораздо быстрее: очень маленькие расстояния для передачи информации и окружение гораздо проще... Затем как-то раз я забыл спрятать свое компьютерное досье под секретный код. Кто-то из руководства его обнаружил и догадался, чем я занимаюсь. Скандал был страшный! Они решили, что из-за моих работ на нас вот-вот спустят всех собак бдительные стражи общественной безопасности. Принялись уничтожать мою работу и стирать программы. Приказали, чтобы я стерилизовал свои лейкоциты. Черт бы их побрал! — Верджил скинул лабораторный халат и начал одеваться. — У меня оставалось от силы дня два. Я отделил наиболее сложные клетки...

— Насколько сложные?

— Они, как и бактерии, держались группами штук по сто. И каждую группу по уровню интеллекта можно было сравнить, пожалуй, с десятилетним ребенком. — Он взглянул мне в глаза. — Все еще сомневаешься? Хочешь, я скажу тебе, сколько нуклеотидных пар содержится в клетках млекопитающих? Я специально запрограммировал свои компьютеры на использование вычислительных мощностей лейкоцитов. Так вот, их там десять миллиардов, Эдвард! Десять, черт побери, в десятой! И у них нет огромного тела, о котором нужно заботиться, растрачивая бо́льшую часть полезного времени.

— Ладно, — сказал я. — Ты меня убедил. Но что было дальше?

Перевод с английского А. Корженевского

(Продолжение следует)

Вниманию читателей!

Для тех, кто не успел подписаться на «Квант» с начала года, напоминаем, что подписка на него принимается без ограничений в агентствах «Союзпечати», на почтамтах и в отделениях связи. Индекс журнала «Квант» в каталоге «Союзпечати» 70465.

Информация

Москва — Сеул

В штурманских картах Всесоюзного молодежного аэрокосмического общества (ВАКО) «Союз» в феврале нынешнего года проложен еще один маршрут — в Республику Корея. Именно туда, с ответным визитом к «Клубу юных астронавтов», отправилась делегация, в составе которой было девять школьников из различных городов Советского Союза, президент ВАКО «Союз» летчик-космонавт А. Серебров, а также автор этих строк.

Насыщенная программа, тепло и внимание, окружавшие нашу делегацию, красота мест, в которых мы побывали, сделали поездку незабываемой.

Удивительным было все, начиная с огромного интереса, которым сопровождался визит непривыкшей к такому вниманию группы наших учащихся. Попав прямо с самолета под прицелы теле- и фотокамер, школьники и взрослые чуть ли не ежедневно в течение своего двухнедельного пребывания в Республике Корея могли видеть сообщения и репортажи о себе в центральных и местных газетах и по телевидению.

Посетив ряд городов, советские школьники познакомились с такими крупнейшими компаниями, как электронная «Самсунг», сталелитейная «Поско», машиностроительная и судостроительная «Хьондей». Увидели множество исторических и культурных памятников, олимпийские объекты...

Очень интересными были посещения школ и образовательного центра в городе Похан. Там мы воочию убедились в тесной связи между успехами, достигнутыми страной, и вниманием к образовательному уровню населения. Впрочем, и сами юные корейцы свои будущие успехи в жизни прочно связывают со своей учебой. Примечательно, что единственное место, где появление советских школьников не отвлекало внимания, были читальные залы.

В Республике Корея, которая не так давно сама переживала трудности в экономике, схожие с сегодняшними нашими, мы увидели реальный вариант выхода из них — когда активная конкуренция отдельных государственных и частных фирм и предприятий, в том числе и в сельском хозяйстве, принимающих самостоятельные решения и не связанных по рукам и ногам ни экономическими, ни идеологическими путами, приводит к изобилию на прилавках. Разумеется, не последнюю роль здесь сыграло и природное трудолюбие корейского народа. И тем не менее, не покидало ощущение, что он, этот народ, лучше нашего знает, ради чего и ради кого он работает. И это знание вкупе с реалистическими задачами помогло стране ворваться в десятку ведущих стран мира.

Утешало и отвлекало от грустных размышлений и ассоциаций (а они, конечно, возникали) лишь то, что по-прежнему престиж наших специалистов — их мы встречали во всех городах, где нам довелось побывать,— довольно высок. Вот только как бы сделать так, чтобы квалификация (особенно в точных науках) советских ученых приносила бóльшую пользу нашей стране?..

Итак, поездка завершена. Ребята из Красноярска и Томска, Запорожья и Мариуполя, Ленинграда и Москвы, своим трудом и успехами в овладении знаниями попавшие в команду, познакомились с другим, неизвестным им миром. В самолете, возвращаясь на Родину, они делились своими впечатлениями. Мне кажется, все

их мысли сконцентрированы в словах Сергея Жатько из Красноярской краевой физико-математической школы-интерната с космической специализацией: «...на наши головы свалилась очень большая масса разнообразной информации, и поэтому мне показалось, что время замедлило свой бег, что я пробыл в Республике Корея два месяца, а не две недели. Но в то же время все пролетело очень быстро. И каждый день мы повторяли «А было ли вчера?»... Понравилось абсолютно все — прием в аэропорту и экскурсии, жизнь в семьях и встреча с советскими моряками, сеульский диснейленд и огромные предприятия и многое другое... Я надеюсь, это не последняя моя поездка и я еще смогу увидеть удивительное многообразие жизни. А будет ли «вчера»?..»

В. Боровишки
Фото Кьюнг Хианга

ЗИФМШ объявляет прием

Заочная инженерная физико-математическая школа (ЗИФМШ) объявляет прием учащихся в 9, 10 и 11 классы на 1991/92 учебный год. Главная цель школы — развить инженерный склад мышления, помочь учащимся глубже изучить математику и физику в объеме школьной программы, научить правильно оформлять решения, подготовиться к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения, готовящие инженеров.

Зачисленным в ЗИФМШ в течение года высылаются методические разработки и контрольные задания; решенные задания оцениваются и рецензируются. Предусмотрено обучение в 9, 10 и 11 классах. Успешно закончившие ЗИФМШ получают удостоверение и имеют преимущество при поступлении в Ленинградский институт инженеров железнодорожного транспорта им. акад. В. Н. Образцова (ЛИИЖТ).

Прием в ЗИФМШ проводится по результатам решения вступительного задания, публикуемого ниже. Рядом с номером задачи стоит указание, поясняющее, для какого класса предназначена эта задача (например, задача 4 входит в конкурсное задание для 9 и 10 классов). Задание для каждого класса состоит из шести задач, но для зачисления в ЗИФМШ достаточно решить большую их часть. Решение вступительного задания необходимо прислать до 31 июля 1991 года по адресу: 190031, Ленинград, Московский проспект, д. 9, ЛИИЖТ, ЗИФМШ, на конкурс. В письмо вложите два экземпляра анкеты, написанной на листах плотной бумаги размером 9×12 см и заполненной по следующему образцу:

Фамилия, имя, отчество	Сидоров Иван Петрович
Класс (номер класса указывается на 1 сентября 1991 года)	9
Подробный домашний адрес	524806, г. Тверь, ул. Ленина, д. 5, кв. 7
Номер и адрес школы	школа № 5, г. Тверь, ул. Ленина, д. 7
Ф.И.О. и профессия родителей	мать — Сидорова Анна Ивановна, врач отец — Сидоров Петр Ильич, электромонтер

Если у вас в семье есть железнодорожники или вы учитесь в железнодорожной школе, отметьте это.

При ЗИФМШ действуют группы «Коллективный ученик». Прием в эти группы проводится без конкурса, достаточно заявления учителя математики или физики, руководящего кружком, с указанием списка учащихся и класса, в котором они будут учиться. Заявление должно быть заверено директором школы (СПТУ) и печатью. Работа руководителей групп «Коллективный ученик» может оплачиваться школами по представлению ЗИФМШ как факультативные занятия.

Несколько слов о ЛИИЖТ. Институт готовит инженеровстроителей, инженеров-электромехаников, инженеров-электриков, инженеров-механиков, инженеров-экономистов, инженеров-системотехников (по специальности ЭВМ), инженеров путей сообщения для работы на железнодорожном транспорте и в других отраслях народного хозяйства.

Задачи вступительного задания

1 (9 кл.). При движении со скоростью 6,4 км/ч электродвигатель аккумуляторного рудничного электровоза развивает мощность 12 кВт. Определите силу тяги электровоза. Почему эксплуатация электровоза в рудниках выгоднее, чем других видов транспорта?

2 (9 кл.). Вычислите значение числового выражения

$$1991 \cdot 19901990 - 1990 \cdot 19911991$$

наиболее рациональным образом (без микрокалькулятора!).

3 (9, 10 кл.). Поезд длиной 150 метров проехал мимо столба за 10 секунд. За какое время поезд проедет мост длиной 300 метров?

4 (9, 10 кл.). Фермеру выделили в аренду поле в форме прямоугольника. Когда срок аренды кончился, ему предложили участок той же формы, но других размеров: одна сторона прямоугольника уменьшена на 20 %, а другая увеличена на 20 %. На сколько процентов изменилась площадь участка?

5 (9, 10, 11 кл.) Радиолюбителю нужен резистор сопротивлением 70 кОм. У него нашлись три резистора сопротивлениями 100 кОм, 50 кОм и 25 кОм. Может ли он составить из них требуемое сопротивление? Если может, то как? Начертите схему.

6 (9, 10, 11 кл.) Решите уравнение

$$\left(\frac{x^2-x-1}{3x-5}\right)^2-\frac{x^2-x-1}{3x-5}=2.$$

7 (10, 11 кл.). Пожарный насос вертикально вверх выбрасывает струю воды диаметром 2 см со скоростью 25 м/с. Найдите мощность насоса.

8 (10, 11 кл.). На аноде электронной лампы за счет кинетической энергии электронов выделилось 20 Дж тепла за 20 минут. Определите скорость движения электрона в лампе, если анодный ток 8 мА.

9 (11 кл.). Наблюдая за равномерно движущимся поездом, мальчик определил, что мимо начала железнодорожной платформы поезд двигался в течение 24-х секунд, а мимо всей платформы поезд прошел за 40 секунд. Измерив длину платформы, которая оказалась равной 240 м, мальчик определил скорость и длину поезда. Какие числовые значения этих физических величин получил мальчик?

10 (11 кл.). Решите уравнение

$$\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1{,}5.$$

Нам пишут

Уважаемая редакция! Пишет ученик 6 класса школы № 2 г. Гайворона Александр Мельник. Однажды мне попалась на глаза задача: *Найти наименьшее целое число, оканчивающееся на 2, такое, что переставив эту цифру в начало, получим вдвое большее число.* Решив эту задачу, я попробовал решить соответствующую задачу для других цифр, а именно: *найти все такие числа (притом наименьшие из возможных), которые увеличиваются при перестановке последней цифры в начало числа во столько раз, какова эта цифра.* Эту задачу мне удалось решить. Вот эти числа для всех 9 цифр.

$1 \cdot 11=11$,
$2 \cdot 105263157894736842=210526315789473684$,
$3 \cdot 1034482758620689655172413793=3103448275862068965517241379$,
$4 \cdot 102564=410256$,
$5 \cdot 1020469387755=5102046938775$,
$6 \cdot 1016949152542372886440677966=6101694915254237288644067796$,
$7 \cdot 1014492753623188405797=7101449275362318840579$,
$8 \cdot 1012658227848=8101265822784$,
$9 \cdot 10112359550561797752808988764044943820224719=$
$=91011235955056179775280898876404494382022471$,

От редакции

Задачу можно переформулировать и так: *Найти все натуральные числа, которые уменьшаются, если некоторое число, стоящее в начале числа переставить в его конец, притом уменьшается во столько раз, каково переставляемое число.* Казалось бы та же задача, но здесь можно переставлять уже любые числа. Так, $100100=10 \cdot 10010$. Конечно же, решить эту задачу так, как она сформулирована, невозможно, т. к. таких чисел может оказаться бесконечно много. Но можно выяснить для всех ли чисел, переставляемых в конец, соответствующее число существует.

Мы спрашиваем — нам отвечают

(по материалам «Анкеты — 90»)

Как наверное уже заметили наши постоянные читатели, раз в квартал мы помещаем в журнале анкету. Нам важно знать, что вам нравится в журнале, а что — нет, о чем вы хотели бы прочитать на его страницах, чем мы можем помочь школьнику, учителю, абитуриенту и чего ждет от «Кванта» просто любитель физики или математики, космонавтики или информатики.

Благодарим всех, кто нашел время ответить на наши вопросы.

К сожалению, на «Анкету — 90» откликнулось значительно меньше читателей, чем в прошлые годы, и поэтому трудиее говорить о закономерностях. И все же...

Вот какая картина сложилась по результатам «Анкеты — 90».

Большинство наших читателей — это, конечно, школьники старших классов. Хотя среди тех, кто заполнил анкету, есть учителя и студенты, рабочие и инженеры. Есть совсем новые подписчики и те, кто выписывает «Квант» со дня рождения журнала.

О популярности рубрик. Самым большим вниманием читателей неизменно пользуются рубрики «Задачник «Кванта», «Школа в «Кванте», «Калейдоскоп», чуть меньшим — «Практикум абитуриента», «Варианты вступительных экзаменов в вузы», «Лаборатория «Кванта», «Математический кружок» и «Квант» для младших школьников» (кстати, этот раздел нравится и «старшим»). К концу года стали очень популярными разделы «Р — значит ракета» и «Фантастика».

Наиболее понравившиеся статьи:

М. Беркинблит, Е. Глаголева. «Математика в живых организмах»,

П. Капица. «О сверхтекучести жидкого гелия II»,

А. Стасенко. «Волны на воде и «Заморские гости» Н. Рериха»,

А. Абрикосов. «О чем не думает горнолыжник»,

А. Савин. «Камушки и шахматная доска»,

Д. Фукс. «Рогатая Сфера Александера»,

М. Каганов. «Письма о физике»,

К. Богданов. «Большие и маленькие на прогулке»,

Л. Ксанфомалити. «Перспективы поиска обитаемых планет»,

К. Феоктистов. «Полет к звездам»,

Б. Левин. «Моретрясение»,

Е. Нариманов. «56 миллионов километров до Красной планеты»,

Я. Смородинский. «Закон всемирного тяготения»,

С. Табачников. «Вариации на тему Эшера»,

С. Табачников. «Математика и нацизм».

Заметим, что среди лучших статей названы четыре статьи, перепечатанные из номеров «Кванта» прошлых лет,— и мы, и вы отметили их высокий уровень.

Наиболее понравившиеся обложки:
обложки номеров 3 и 9 (к статье «Ультразвук в медицине» и к материалу «Гиперболический параболоид»).

Оценки и пожелания как всегда разнообразны, нередко диаметрально противоположны (порой категоричны!), нас спрашивают, от нас требуют:

«Пусть «Квант» будет такой, какой был до этого времени»,

«Я надеялась на лучшее, зря выписала!»,

«Обращайтесь, пожалуйста, к старым публикациям и изданиям»,

«Больше историзма и занимательности»,

«Не отдавать обложку абстракционистам!»,

«Каждая обложка хороша и соответствует номеру»,

«Больше опытов для самостоятельной работы»,

«Поместите хотя бы один тест, чтобы узнать свой уровень развития»,

«Все иллюстрации «на пять»,

«Дурацкие рисунки»,

«Нравятся все статьи, кроме фантастических рассказов. Не засоряйте журнал!»,

«Фантастики!»,

«Нельзя ли создать «Квант» для химиков и биологов?»,

«Журнал должен потолстеть»,

«Программирование! Программирование! Программирование!»...

Нам жалуются: «Как только прочту условие задачи из «Задачника», сразу голова болит».

Многое из того, что мы обещали нашим читателям, мы выполняем. Постоянно публикуются статьи о сегодняшних достижениях физики и математики, о выдающихся ученых прошлого, интервью с современными учеными. В журнале регулярно появляются «космические» материалы и фантастика. Почти в каждом номере есть материалы для любителей игр и головоломок. И на отсутствие задач и конкурсов пожаловаться нельзя! Одних только задач в каждом номере бывает до 100, а конкурсов в 1990 году объявлено целых 6.

Да... Какие-то обещания мы выполнили, а какие-то вопросы все еще обдумываем и обсуждаем (так, к сожалению, еще не возник обещанный раздел, условно названный нами «Для самых младших школьников», пока не получился и материал с ответами на ваши вопросы главного редактора журнала академика Ю. А. Осипьяна).

В будущем мы намерены сохранить облик журнала. Но жизнь идет вперед, и, несомненно, будет меняться и наш журнал. По многочисленным просьбам читателей мы хотим возродить раздел «Информатика и программирование», расширить «Квант» для младших школьников». Планируем помещать в журнале материалы на темы «физика и биология», «математика, информатика и биология».

Мы надеемся, что каждый читатель найдет «свой» материал в «Кванте».

Наша анкета все так же будет появляться раз в квартал. И мы все так же ждем от вас писем!

От уравнения — к системе

Кандидат физико-математических наук
А. ЯРСКИЙ

Начнем с примера, достаточно типичного для вступительных экзаменов.

Задача 1 (МИЭМ, 1982 г.). *Решите уравнение*

$$\sqrt{x+2}-\sqrt{x-a+2}=1.$$

Обычно примеры такого типа решают двукратным возведением в квадрат. При этом возникает необходимость отсеять приобретенные в результате возведения в квадрат посторонние корни, что при наличии в уравнении параметра оказывается довольно сложной задачей. Мы попробуем поступить иначе.

Решение. Введем новые неизвестные

$$\begin{cases} u=\sqrt{x+2}\geqslant 0, \\ v=\sqrt{x-a+2}\geqslant 0. \end{cases}$$

Неизвестные u и v связаны равенством

$$u^2-v^2=a,$$

и исходное уравнение принимает вид

$$u-v=1.$$

Таким образом, от уравнения мы пришли к системе

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^2-v^2=a, \end{cases}$$

которая легко решается:

$$\begin{cases} u-v=1, \\ (u-v)(u+v)=a \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u-v=1, \\ u+v=a \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} u=(a+1)/2, \\ v=(a-1)/2. \end{cases}$$

Итак,

$$\begin{cases} \sqrt{x+2}=(a+1)/2\geqslant 0, \\ \sqrt{x-a+2}=(a-1)/2\geqslant 0, \end{cases}$$

откуда получаем

Ответ: $x=\frac{(a+1)^2}{4}-2$ при $a\geqslant 1$, при $a<1$ решений нет.

Задача 2. *Решите уравнение*

$$\sqrt[3]{2-x}+\sqrt{x-1}-1=0.$$

Решение. Введем неизвестные

$$u=\sqrt[3]{2-x}\ ,\ v=\sqrt{x-1}\geqslant 0.$$

Тогда

$$\begin{cases} u^3+v^2=1, \\ u+v=1. \end{cases} \qquad (1)$$

Следовательно,

$$u^3+u^2-2u=0,$$

откуда $u\in\{0, 1, -2\}$, так что система (1) имеет 3 решения: (0; 1), (1; 0), (—2; 3), после чего находим

Ответ: 2; 1; 10.

Разумеется, для отыскания значения x нет необходимости на заключительном этапе рассматривать оба соотношения системы (6). Но в таком случае для завершения решения потребуется проверка.

При переходе от уравнения к системе могут, вообще говоря, возникнуть некоторые сложности: не видна связь входящих в уравнение комбинаций неизвестных, сложна возникшая система, не ясно, что принимать за новые неизвестные и т. п.

Задача 3. *Решите уравнение*

$$\sqrt[4]{97-x}+\sqrt[4]{x-15}=4.$$

Решение. Введя неизвестные

$$u=\sqrt[4]{97-x}\geqslant 0,\ v=\sqrt[4]{x-15}\geqslant 0,$$

приходим к системе

$$\begin{cases} u^4+v^4=82, \\ u+v=4. \end{cases} \qquad (2)$$

Далее,

$$u^4+v^4=((u+v)^2-2uv)^2-2u^2v^2,$$

а так как $u+v=4$, то

$$u^4+v^4=(16-2uv)^2-2u^2v^2.$$

Мы получим квадратное уравнение относительно $t=uv$:

$$(16-t)^2-2t^2=82.$$

Отсюда $t=29$ или $t=3$. С учетом (2) получаем

$$\begin{cases} u+v=4, \\ uv=29 \end{cases} \text{ или } \begin{cases} u+v=4, \\ uv=3. \end{cases}$$

Первая из этих систем несовместна. Вторая — имеет 2 решения:

$$(1;\ 3),\ (3;\ 1).$$

Теперь уже без труда находим x.

Ответ: 16; 96.

Решенная нами система уравнений (7) является частным случаем так называемых симметрических систем.

Задача 4 (МИИТ, 1973 г.). *Решите уравнение*

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{\frac{x-1}{x}}-1=0.$$

Решение. Напрашивается замена

$$\sqrt{x+1}=u\geqslant 0,\ \sqrt{\frac{x-1}{x}}=v\geqslant 0, \tag{3}$$

так что $u-v=1$. Исключим x из системы (3). Поскольку

$$x=u^2-1;\ x=\frac{1}{1-v^2},$$

то

$$(u^2-1)(v^2-1)=-1.$$

Итак, u и v удовлетворяют системе

$$\begin{cases} u-v=1, \\ u^2v^2-u^2-v^2+2=0. \end{cases}$$

Перепишем второе уравнение:

$$(uv)^2-(u-v)^2-2uv+2=0.$$

Так как $u-v=1$, приходим к уравнению

$$(uv)^2-2uv+1=0,$$

откуда $uv=1$. Итак, мы пришли к системе

$$uv=1,\ u-v=1.$$

С учетом условия $u\geqslant 0$, $v\geqslant 0$, получаем

$$u=(1+\sqrt{5})/2;\ v=(-1+\sqrt{5})/2,$$

после чего легко найти

Ответ: $x=(1+\sqrt{5})/2$.

В задаче 4 исключение из системы (3) неизвестного x потребовало выкладок. Но нередко, введя новые неизвестные, все-таки не удается исключить x из возникшей системы. Тем не менее система оставляет заметно больше возможностей для ее решения, нежели исходное уравнение. Сказанное может проиллюстрировать

Задача 5. *Решите уравнение*

$$\sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}}+\sqrt{x-\frac{7}{x^2}}=x.$$

Решение. Положим

$$u=\sqrt{x^2-\frac{7}{x^2}}\geqslant 0,\ v=\sqrt{x-\frac{7}{x^2}}\geqslant 0,$$

тогда

$$\begin{cases} u^2-v^2=x^2-x, \\ u+v=x. \end{cases}$$

Подстановка приводит первое уравнение системы к виду

$$x(u-v)=x(x-1).$$

Так как $x\neq 0$, то u и v удовлетворяют системе

$$\begin{cases} u-v=x-1, \\ u+v=x \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} u=x-1/2, \\ v=1/2. \end{cases}$$

Любое из равенств последней системы после несложных преобразований приводит к уравнению

$$4x^3-x^2-28=0.$$

Заметим, что $x=2$ является корнем этого уравнения, и разложим лёвую часть на множители:

$$4x^3-x^2-28=4x^3-8x^2+7x^2-14x+\\+14x-28=(x-2)(x^2+7x+14),$$

отсюда видно, что $x=2$ — единственный корень. Выполнив проверку, убеждаемся, что он удовлетворяет и исходному уравнению.

Ответ: 2.

Отметим, что логика решения последнего уравнения не была столь прозрачной, как в предыдущих случаях. Поэтому, чтобы избежать длинных объяснений, проще сделать проверку.

Довольно часто подстановка, которую целесообразно применить, бывает замаскирована.

Задача 6. *Решите уравнение*

$$\frac{(x^2+1)(x+1)^2+x^2}{x^2(x^2+1)+1}=x+\frac{1}{x}.$$

Решение. Преобразуем уравнение

$$\frac{(x^2+1)(x^2+1+2x)+x^2}{(x^2+1)^2-x^2}=\frac{x^2+1}{x}.$$

Введя новое неизвестное
$$y=x^2+1,$$
приведем уравнение к виду
$$\frac{y(y+2x)+x^2}{y^2-x^2}=\frac{y}{x}.$$
После замены $y/x=t$ получаем уравнение
$$\frac{t(t+2)+1}{t^2-1}=t, \text{ или } t+1=t(t-1),$$
имеющее корни $t_{1,2}=1\pm\sqrt{2}$.

Итак, $\frac{x^2+1}{x}=1\pm\sqrt{2}$,

т. е. $x^2-(1\pm\sqrt{2})x+1=0$, откуда получаем

Ответ: $(1+\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1})/2$.

Введение дополнительных неизвестных бывает особенно полезным при решении систем уравнений.

Задача 8. *Решите систему*
$$\begin{cases} 2x^2+xy=1, \\ \dfrac{9x^2}{2(1-x)^4}=1+\dfrac{3xy}{2(1-x)^2}. \end{cases}$$

Решение. Во втором уравнении системы удобно положить
$$z=\frac{3x}{(1-x)^2}.$$
Тогда
$$z^2=2+zy. \qquad (4)$$
Теперь, разделив первое уравнение на x^2, приведем его к виду
$$\left(\frac{1}{x}\right)^2=2+\left(\frac{1}{x}\right)y \qquad (5)$$
($x\neq 0$). Дальнейшее напрашивается: вычтя из уравнения (4) уравнение (5), получим
$$\left(z-\frac{1}{x}\right)\left(z+\frac{1}{x}\right)=\left(z-\frac{1}{x}\right)y,$$
откуда либо $z=1/x$, либо $z+1/x=y$. В первом случае получаем
$$\frac{3x}{(1-x)^2}=\frac{1}{x}, \text{ т. е. } x=\frac{1}{2}(-1\pm\sqrt{3}),$$
$$y=2.$$
Во втором случае $xz+1=xy$, что вместе с первым уравнением исходной системы дает $2x^2+xz+1=1$. А так как $x\neq 0$, то $2x+z=0$, т. е.
$$\frac{3x}{(1-x)^2}+2x=0.$$
Это уравнение ненулевых корней не имеет.

Ответ: $((-1\pm\sqrt{3})/2;\ 2)$.

В заключение предлагаем вам самостоятельно решить следующие упражнения.

Упражнения

1. Решите уравнения

а) (МИЭМ, 1979 г.) $\sqrt{x+1}-\sqrt{a-x}=1$;

б) (ЛГУ, матмех, 1975 г.) $\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{1+x}=p$;

в) $2\sqrt[4]{x-1}+\sqrt[3]{27-14x}=1$;

г)* $x=\sqrt{a-x}\sqrt{b-x}+\sqrt{b-x}\sqrt{c-x}+\sqrt{c-x}\sqrt{a-x}$;

д)* $7\sqrt{4x^2+5x-1}-14\sqrt{x^2-3x+3}=17x-13$;

е) $(x^2+3x-4)^3+(2x^2-5x+3)^3=(3x^2-2x-1)^3$;

ж) (ЛГУ, физфак, 1974 г.)
$$\frac{x^2}{x-1}+\sqrt{x-1}+\frac{\sqrt{x-1}}{x^2}=\frac{x-1}{x^2}+\frac{1}{\sqrt{x-1}}+\frac{x^2}{\sqrt{x-1}};$$

з) (МАИ, 1973 г.) $\sqrt{3-x}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2-x}}=1$;

и) (МИРЭА, 1986 г.)
$$\sqrt{7x^2+8x+10}-\sqrt{7x^2-8x+10}=2x;$$

к) $(x^2+2x-5)^2+2(x^2+2x-5)=x+5$;

л) $\sqrt{a-\sqrt{a+x}}=x$;

м) $\dfrac{(x-1)^2x}{(x^2-x+1)^2}=\dfrac{2}{9}$;

н) $\dfrac{x^2-10x+15}{x^2-6x+15}=\dfrac{3x}{x^2-8x+15}$;

о) $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{35}{12}$;

п) $\dfrac{x^4+4}{x^2+2}=5x$;

р) $x^2+\dfrac{25x^2}{(x+5)^2}=11$.

2. Решите неравенства

а) $\sqrt{x-\dfrac{1}{x}}-\sqrt{1-\dfrac{1}{x}}>\dfrac{x-1}{x}$;

б) $\sqrt{12-\dfrac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\dfrac{12}{x^2}}<x^2$.

3. Решите системы уравнений

а) (НГУ, геологич. ф-т, 1976 г.)
$$\begin{cases} \sqrt{-1-x}-\sqrt{2y-x}=1, \\ \sqrt{1-2y}+\sqrt{2y-x}=4; \end{cases}$$

Варианты вступительных экзаменов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Перейдя на более производительный станок, рабочий экономит 3 минуты при обработке одной детали, а за шестичасовую смену обрабатывает на 10 деталей больше, чем прежде. Сколько деталей делает теперь рабочий за смену?

2. Решите уравнение

$$2\cos x+\sqrt{6\sin x}=0.$$

3. Решите уравнение

$$\log_3(3x+8)=1-\log_3 x.$$

4. Решите неравенство

$$\frac{8}{4^{x-1}-1}>4^x.$$

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} y=x^2+1, \\ y^2-x^2-ay-ax+\frac{y}{a}-\frac{x}{a}-1=0 \end{cases}$$

имеет решение.

6. В прямоугольном параллелепипеде с ребрами $a=2$, $b=3$, $c=6$ через точку M, лежащую на одном из самых коротких ребер, и диагональ параллелепипеда, не пересекающую это ребро, проведена плоскость. Какую наименьшую площадь может иметь сечение параллелепипеда этой плоскостью? Найдите длины сторон этого сечения.

Вариант 2

1. Поезд вышел из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 342 км. Через один час навстречу ему из пункта B вышел второй поезд, проходивший в час на 9 км больше, чем первый. Определите скорость каждого поезда, если они встретились на расстоянии 162 км от пункта B.

2. Решите уравнение

$$\cos 9x+\cos 6x+\cos 3x=0.$$

3. Решите уравнение

$$8\cdot 64^{\frac{1}{x}}-3\cdot 2^{\frac{3x+3}{x}}+16=0.$$

4. Определите, при каких значениях p прямая $y=x+1$ является касательной к графику функции $y=x^2+px+2$. Сделайте чертеж.

5. Найдите все значения параметра a, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x-2a+1)^2+y^2=a^2, \\ y^2=2x \end{cases}$$

имеет четыре различных решения.

6. Основанием пирамиды служит ромб со стороной $c=5$ и радиусом вписанной окружности $r=2{,}4$; высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей ромба и равна стороне основания. В пирамиду вписан прямоугольный параллелепипед, одна грань которого лежит в плоскости основания пирамиды, а вершины противолежащей грани принадлежат ее боковым граням. Какой наибольший объем может иметь параллелепипед?

Физика

Задачи устного экзамена

1. Снаряд, летящий горизонтально со скоростью v, разрывается на большое число осколков одинаковой массы. Максимальная скорость осколков относительно земли равна u. Считая, что осколки равномерно разлетаются в пространстве с равными стартовыми скоростями, найдите скорость осколков, летящих перпендикулярно направлению движения снаряда.

2. По сторонам прямого угла скользит жесткая спица длиной $2l$, посередине которой закреплена бусинка массой m (рис. 1). Скорость точки B постоянна и равна v. Определите, с какой силой действует бусинка на спицу в тот момент, когда угол $\alpha=45°$.

3. Легкая пружина жесткостью k и длиной l стоит вертикально на столе (рис. 2). На нее падает небольшой шарик, имеющий начальную скорость, равную нулю. Пружина упруго деформируется, и шарик подскакивает вертикально вверх. Максимальная скорость шарика при его движении оказалась равной v. На какую высоту поднимется центр тяжести пружины?

4. Бассейн заполнен двумя несмешивающимися жидкостями, плотности которых ρ и 2ρ, толщина слоев $2h$ и h соответственно. На дне бассейна лежит однородный стальной стержень, длина которого $l=2h$, а плотность 6ρ. К одному концу стержня привязана нить, за которую стержень медленно вытаскивают из бассейна, так что центр тяжести стержня поднимается на высоту H над поверхностью жидкости ($H>l$). Какая работа совершается при подъеме стержня? Силами сопро-

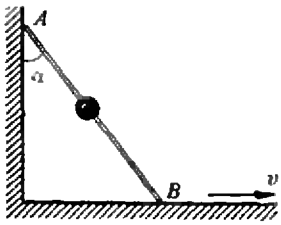


Рис. 1.

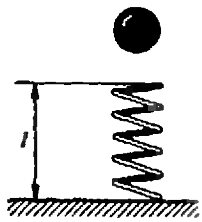


Рис. 2.

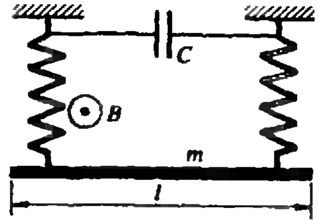


Рис. 3.

тивления и массой нити пренебречь. Масса стержня m.

5. Один моль идеального одноатомного газа расширяется по закону $pV^3=\text{const}$ от объема V_1 и давления p_1 до объема V_2. Определите изменение внутренней энергии газа.

6. В цилиндре под поршнем находится газ. Поршень соединен с дном цилиндра пружиной, упругие свойства которой подчиняются закону Гука. При нагревании газа его объем изменяется от V_1 до V_2, а давление — от p_1 до p_2. Пренебрегая трением и массой поршня, определите совершаемую при этом работу.

7. Три электрона движутся под действием сил электростатического отталкивания. Какую скорость будут они иметь, когда расстояние между ними станет бесконечно большим? В начальный момент электроны находились на расстоянии $a=1$ см друг от друга и имели скорость, равную нулю.

8. Проводник массой m и длиной l подвешен к диэлектрику с помощью двух одинаковых пружин с общей жесткостью k (рис. 3). Однородное магнитное поле с индукцией B направлено перпендикулярно плоскости рисунка. К верхним концам пружины присоединен конденсатор емкостью C. Пренебрегая сопротивлением, собственной индуктивностью и емкостью проводников, определите период колебаний системы в вертикальной плоскости.

9. Заряженная частица массой m и зарядом q, пройдя разность потенциалов U_0, влетает в плоский конденсатор параллельно его пластинам. Расстояние между пластинами конденсатора d, разность потенциалов U. Конденсатор находится в однородном магнитном поле. Какова должна быть индукция магнитного поля, чтобы скорость частицы не изменилась?

10. В установке для демонстрации опыта Юнга по дифракции света расстояние между щелями $d=0{,}07$ мм, а расстояние от двойной щели до экрана $l=2$ м. Прибор освещается зеленым светом с длиной волны $\lambda=5{,}0\cdot10^{-5}$ см. На сколько нужно изменить длину волны источника, освещающего прибор, чтобы при помещении установки в воду расстояние между соседними светлыми дифракционными полосами осталось неизменным? Коэффициент преломления воды принять равным $n=1{,}3$.

Публикацию подготовили Л. Паршев, Ю. Струков

Московский авиационный технологический институт им. К. Э. Циолковского

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2-xy-y^2=5, \\ x-y=2. \end{cases}$$

2. Решите неравенство

$$\frac{1}{\lg x}+\frac{3}{\lg x-2}<-2.$$

3. Решите уравнение

$$\frac{1+\sin 2x}{1-\sin 2x}+2\,\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}-3=0.$$

4. Дорога от A до B длиной 11,5 км идет сначала в гору, потом по ровному месту, а затем под гору. Пешеход, идя из A в B, прошел всю дорогу за 2 часа 54 минуты, а на обратную дорогу затратил 3 часа 6 минут. Скорость ходьбы: в гору 3 км/ч, по ровному месту — 4 км/ч, под гору — 5 км/ч. На каком протяжении дорога идет по ровному месту?

5. В треугольнике ABC известны длины сторон: $AB=15$, $BC=13$ и $AC=14$. Через точку C проведен перпендикуляр к стороне AC до пересечения в точке K с продолжением стороны AB. Определите BK и CK.

Вариант 2

1. Решите уравнение

$$\sqrt{2x-1}=x-2.$$

2. Решите неравенство

$$\frac{4^x+4\cdot 2^x-9}{x}<1.$$

3. Решите уравнение

$$\sin^5 x\cos x-\sin x\cos^5 x=2/8.$$

4. Найдите число членов арифметической прогрессии, сумма членов которой равна 154, сумма первых трех членов равна 6, а сумма первых пяти членов равна 25.

5. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два треугольника с периметрами 8 и 9. Найдите длины сторон треугольника.

Вариант 3

1. Решите уравнение

$$4^x+2^x-6=0.$$

2. Решите неравенство

$$|x^2+4x-1|<4.$$

3. Решите уравнение

$$\sin 3x+\sin x-\sin 2x=2\cos x(\cos x-1).$$

4. Из A в B через равные промежутки времени отправляются три автомобиля. В B они прибывают одновременно, а затем выезжают в пункт C, лежащий на расстоянии 240 км от B. Первая машина прибывает туда через час после второй. Третья машина, прибыв в C, сразу после этого поворачивает обратно и в 80 км от C встречает первую машину. Определите скорость первой машины, считая, что по всей трассе скорость каждой машины была неизменной.

5. В трапецию, у которой меньшее основание равно 6, вписана окружность. Одна из боковых сторон трапеции делится точкой касания на отрезки с длинами 9 и 4. Найдите площадь трапеции.

Физика

Задачи устного экзамена

1. Вы в состоянии сообщить мячу начальную скорость $v=20$ м/с. Какова максимальная дальность вашего броска в спортивном зале, высота которого $h=5$ м?

2. Минимальное время разгона автомобиля до скорости $v=72$ км/ч (при трогании с места) равно $t=5$ с. Найдите коэффициент трения между колесами и дорогой и наименьший тормозной путь автомобиля, набравшего эту скорость, до остановки.

3. На дне сосуда стоит деревянный куб с ребром $a=20$ см. В сосуд наливают воду, которая постепенно проникает под нижнюю грань куба. Когда уровень воды в сосуде поднимается выше верхней грани куба на $h=5$ см, куб всплывает. Определите площадь сухой поверхности нижней грани куба перед его всплытием. Плотность дерева $\rho_1=0{,}5\cdot 10^3$ кг/м^3, плотность воды $\rho_2=10^3$ кг/м^3.

4. Баллон емкостью $V_1=2$ л, содержащий $\nu_1=1$ моль газа при температуре $t_1=27$ °С, соединили с другим баллоном емкостью $V_2=4$ л, содержащим $\nu_2=2$ моля этого же газа при температуре $t_2=87$ °С. Определите давление и температуру газа после установления теплового равновесия. Теплообменом с окружающей средой пренебречь.

5. Идеальная тепловая машина, работающая по обратному циклу, передает тепло от холодильника с водой при температуре $t_1=0$ °С кипятильнику с водой при температуре $t_2=100$ °С. Сколько воды нужно заморозить в холодильнике, чтобы превратить в пар $m=1$ кг воды в кипятильнике? Удельная теплота плавления льда $\lambda=333$ кДж/кг, удельная теплота парообразования воды $r=2250$ кДж/кг.

6. Протон на большом расстоянии от проводника имел скорость $v_0=10^6$ м/с. Потенциал проводника $\varphi=-3$ кВ. Траектория протона заканчивается на поверхности проводника. Какую скорость имел протон вблизи этой поверхности? Масса протона $m=1{,}67\cdot 10^{-27}$ кг, заряд протона $e=1{,}6\cdot 10^{-19}$ Кл.

7. Зарядка аккумулятора производится током $I_1=4$ А. Напряжение на клеммах аккумулятора при зарядке $U_1=12{,}6$ В. При разрядке того же аккумулятора током $I_2=6$ А напряжение на клеммах $U_2=11{,}1$ В. Найдите ток короткого замыкания.

8. Колебательный контур состоит из конденсатора емкостью $C=1{,}2$ нФ и катушки индуктивностью $L=6$ мкГн и сопротивлением $R=0{,}5$ Ом. Какую мощность должен потреблять контур, чтобы в нем поддерживались незатухающие гармонические колебания с амплитудой напряжения на конденсаторе $U_m=10$ В?

9. Самолет пролетает над погрузившейся на небольшую глубину подводной лодкой на высоте $h=3$ км. Какой покажется высота полета самолета при наблюдении с лодки? Показатель преломления воды $n=4/3$.

10. Реакцию синтеза дейтерия и трития $^2H+^3H \to {}^1n+{}^4He$ изучают, направляя ускоренные до энергии $E=2$ МэВ ионы дейтерия на тритиевую мишень. Детектор регистрирует нейтроны, вылетающие перпендикулярно направлению пучка дейтронов. Определите энергию регистрируемых нейтронов, если в реакции выделяется энергия $\Delta E=17{,}6$ МэВ.

Публикацию подготовили Р. Ведерников, М. Либерзон, А. Симонов

Московский институт нефти и газа им. И. М. Губкина

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Вычислите при $a=\sqrt{5}-7$

$$\frac{5\sqrt{5}-15a+3\sqrt{5}a^2-a^3}{(\sqrt{5}-a)^2}.$$

2. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(8-x)}>2-x.$$

3. Найдите девятнадцатый член арифметической прогрессии при условии, что ее девятый член равен 13, а разность прогрессии равна 2.

4. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$\frac{0{,}2^{5x-7}}{0{,}04^{1{,}5x+3}}\geqslant 25.$$

5. Решите уравнение

$$\log_2(2x+1)-\log_2(3x+5)=-1.$$

6. Найдите в градусах решение уравнения

$$5\operatorname{tg} x-\frac{1}{\cos^2 x}+7=0,$$

удовлетворяющее условию $-90°<x<0$.

7. Преобразуйте в произведение выражение

$$4\sqrt{2}\left(\cos^2\frac{7\alpha}{8}-\sin^2\frac{49\alpha}{8}\right)$$

и вычислите его значение при $\alpha=\pi/21$.

8. Объем конуса равен $\frac{\pi}{3}\sqrt{143}$. Величина угла развертки боковой поверхности конуса равна 30°. Чему равна длина его образующей?

9. Через точку $M_0(x_0;\,y_0)$ параболы $y=x^2+10$ проведена к ней касательная. Касательная пересекает параболу $y=x^2-1$ в точках $M_1(x_1;\,y_1)$ и $M_2(x_2;\,y_2)$, причем $x_1<x_2$. Найдите отношение длины отрезка M_1M_2 к длине отрезка M_0M_2.

10. Найдите середину интервала, являющегося решением системы

$$\begin{cases} |2x^2-33x+112|\leqslant 21, \\ x\geqslant 7{,}5. \end{cases}$$

11. Дано:

$$x=\log_{0,1}8-\frac{1}{\log_4 0{,}1}.$$

Найдите 10^x.

12. В параллелограмме $ABCD$ известны длины диагоналей $AC=15$, $BD=9$. Радиус окружности, описанной около треугольника ADC, равен 10. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABD.

Вариант 2

1. Вычислите

$$\frac{a^6+8}{a^4-2a^2+4}-\frac{a^4-4}{a^2+2}.$$

2. Найдите наименьшее целое решение неравенства

$$\sqrt{3(x+2)}>2x+1.$$

3. Отношение седьмого члена геометрической прогрессии к четвертому равно 27. Найдите первый член прогрессии, если ее третий член равен 36.

4. Найдите наибольшее целое решение неравенства

$$0{,}25^x-6\cdot 0{,}5^x-16>0.$$

5. Найдите меньший корень уравнения

$$\log^2_{0,25}x+3\log_{0,5}x+5=0.$$

6. Найдите в градусах корень уравнения

$$\cos 5x=\sin x,$$

удовлетворяющий условию $0<x<60°$.

7. Вычислите

$$\frac{\cos^2 56°-\sin^2 4°}{\cos 52°}.$$

8. В основании прямой призмы лежит прямоугольный треугольник с катетами 3 и 4. Высота призмы равна 2. Найдите площадь полной поверхности призмы.

9. При каком значении c функция

$$y=4-(2c+4)x+(c+2{,}5)x^2-\frac{1}{3}x^3$$

монотонно убывает на всей числовой оси?

10. Найдите количество целых чисел, не являющихся решениями неравенства

$$|4x^2+6x-59|>49.$$

11. Вычислите

$$\frac{\log_2\frac{2}{11}\cdot\log_2\frac{11}{2}\cdot\log_{11}2}{\log_2 11+\log_{11}2-2}.$$

12. В параллелограмме $ABCD$ бóльшая сторона AD равна 5. Биссектрисы углов A и B пересекаются в точке M. Вычислите площадь параллелограмма, если $BM=2$ и $\cos\angle BAM=0{,}8$.

Физика

Письменный экзамен

В каждом варианте 4 задачи из 12 были относительно более сложными и при подсчете баллов оценивались в два раза «дороже». Такие задачи здесь отмечены звездочкой.

Вариант 1

1*. Конькобежец проходит путь $s=450$ м с постоянной скоростью v, а затем тормозит до остановки с ускорением, модуль которого $a=0{,}5$ м/с^2. При некотором значении v общее время движения конькобежца будет минимальным. Чему оно равно?

2. Шарик массой $m=20$ г, падающий со скоростью $v_1=5$ м/с, ударяется о плиту и отскакивает от нее в противоположном направлении со скоростью, абсолютная величина которой $v_2=4{,}5$ м/с. Найдите среднюю силу, с которой плита действовала при ударе на шарик, если время соударения $t=0{,}01$ с.

3. На легкой нерастяжимой нити подвешен тяжелый шарик. На какой угол нужно отвести нить от положения равновесия, чтобы при последующих качаниях максимальная сила натяжения нити была в $n=4$ раза больше минимальной?

4*. Из двух абсолютно упругих шаров шар большей массы до удара покоился. В результате прямого удара меньший шар потерял $\alpha=3/4$ своей кинетической энергии. Чему равно отношение масс шаров?

5. Металлический брусок плавает в сосуде, в который налита ртуть, а поверх нее — вода. При этом в ртуть брусок погружен на $\alpha_1=1/4$ своей высоты, а в воду — на $\alpha_2=1/2$ высоты. Найдите плотность металла. Плотность ртути $\rho_1=13{,}6$ г/см^3, плотность воды $\rho_2=1$ г/см^3.

6. Найдите среднюю квадратичную скорость молекул газа, если, имея массу $m=6$ кг, он занимает объем $V=4{,}9$ м^3 при давлении $p=200$ кПа.

7*. Количество теплоты, получаемое тепловой машиной от нагревателя, равно $Q=1$ кДж. При этом объем газа увеличивается от $V_1=1$ л до $V_2=2$ л, а давление в зависимости от объема линейно убывает от $p_1=1000$ кПа до $p_2=400$ кПа. Найдите изменение внутренней энергии газа.

8. Плоский конденсатор, пластины которого расположены вертикально, погружается на $\alpha=1/3$ площади пластин в жидкий диэлектрик с диэлектрической проницаемостью $\varepsilon=7$. Во сколько раз при этом возрастает емкость конденсатора?

9. За время $t=1$ мин через поперечное сечение проводника прошел электрический заряд $q=100$ Кл. При этом первые $t_1=10$ с сила тока равномерно возрастала от нуля до некоторой величины I, а последние $t_2=t_1=10$ с — равномерно уменьшалась до нуля. Найдите величину I.

10*. Протон влетает со скоростью $v=60$ км/с в пространство с электрическим и магнитным полями, линии которых совпадают по направлению, перпендикулярно этим линиям. Найдите напряженность электрического поля, если индукция магнитного поля $B=0{,}1$ Тл, а начальное ускорение протона, вызванное действием этих полей, $a=10^{12}$ м/с^2. Отношение заряда протона к его массе q/m принять равным 10^8 Кл/кг.

11. Имеются два когерентных источника звука. В точке, отстоящей от первого источника на $x_1=2{,}3$ м, а от второго на $x_2=2{,}48$ м, звук не слышен. Минимальная частота колебаний, при которой это возможно, равна $\nu=1$ кГц. Найдите скорость распространения звука.

12. Два точечных источника света находятся на расстоянии $l=24$ см друг от друга. Между ними на расстоянии $l_1=6$ см от одного из них помещена собирающая линза. При этом изображения обоих источников получились в одной и той же точке. Найдите фокусное расстояние линзы.

Вариант 2

1. Скорость свободно падающего тела увеличилась за время $t_1=2$ с в $n_1=5$ раз. Во сколько раз увеличится его скорость по сравнению с начальной через $t_2=6$ с после начала падения?

2*. Автомобиль начал двигаться с ускорением $a_0=3$ м/с^2. При скорости $v_1=60$ км/ч ускорение стало равным $a_1=1$ м/с^2. С какой скоростью будет двигаться автомобиль при равномерном движении, если сила тяги двигателя постоянна, а общая сила сопротивления пропорциональна скорости?

3. При движении гоночного автомобиля вдоль экватора со скоростью $v=360$ км/ч с запада на восток и в обратном направлении силы давления автомобиля на дорогу отличаются на $\Delta F=73$ Н. Чему равна масса автомобиля? Угловая скорость вращения Земли $\omega=7{,}3\times10^{-5}$ $с^{-1}$.

4. Груз массой $m=0{,}1$ кг, привязанный к нерастяжимой нити, вращается в вертикальной плоскости. Чему равна при этом максимальная разность натяжений нити?

5*. Согласно желанию сиракузского властителя, Архимед должен был определить содержание золота в короне, состоящей из золотых и серебряных частей, не разрушая ее. Для этого Архимед взвесил корону в воздухе и получил вес $P_1=25{,}4$ Н, а затем — в воде, получив вес (подъемную силу) $P_2=23{,}4$ Н. Зная плотность золота и серебра ($\rho_1=19{,}3$ г/см^3 и $\rho_2=10{,}5$ г/см^3), определите, как и Архимед, массу золота, содержавшегося в этой короне. Ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2, плотность воды $\rho_0=1$ г/см^3.

6. Объем цилиндра откачивающего поршневого насоса в $\alpha=4$ раза больше объема откачиваемого сосуда. За сколько ходов поршня давление в сосуде уменьшится от атмосферного $p_0=100$ кПа до $p=800$ Па?

7. Двигатель реактивного самолета с коэффициентом полезного действия $\eta=20\%$ при полете со скоростью $v=1800$ км/ч развивает силу тяги $F=86$ кН. Найдите расход керосина (m) за время полета $t=1$ ч. Теплота сгорания керосина $q=4{,}3\cdot10^7$ Дж/кг.

8*. Конденсатор, подключенный к источнику тока проводами с сопротивлением $R=100$ Ом, имеет первоначальную емкость $C=2$ мкФ. Затем его емкость за некоторое время равномерно увеличивают в $n=5$ раз. При этом в подводящих проводах выделяется в виде тепла $Q=2{,}56$ мДж энергии. Сколько времени длилось увеличение емкости конденсатора? Напряжение на конденсаторе считать постоянным и равным $U=2$ кВ.

9. При замыкании на сопротивление $R=5$ Ом батарея дает ток $I=1$ А. Ток короткого замыкания батареи $I_0=6$ А. Какую наибольшую полезную мощность может дать эта батарея?

10. Какая масса меди выделится за время $t=2000$ с на катоде при электролизе медной соли, если в течение первой половины этого времени сила тока равномерно возрастает от нуля до $I_1=6$ А, а в течение второй половины равномерно уменьшается до $I_2=3$ А? Электрохимический эквивалент меди $k=3\cdot10^{-7}$ кг/Кл.

11*. Во сколько раз время прохождения колеблющейся точкой первой половины амплитуды меньше, чем время прохождения второй половины?

12. Атом водорода переходит из низшего энергетического состояния в возбужденное при поглощении фотона, энергия которого составляет $\alpha=8/9$ энергии ионизации атома водорода. Каков номер этого возбужденного состояния?

Публикацию подготовили
Л. Белопухов, Б. Писаревский

Московский институт электронной техники

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Выведите формулу корней квадратного уравнения.

2. Дайте определение косинуса числа α.

3. Диагональ AC четырехугольника $ABCD$ является диаметром окружности, описанной около этого четырехугольника. Вычислите длину диагонали BD, если $AC=4$, $CD=2\sqrt{2}$ и $\angle BAC:\angle CAD=2:3$.

4. В двух бидонах находится 70 литров молока. Если из первого бидона перелить во второй 12,5 % молока, находящегося в первом бидоне, то в обоих бидонах будет поровну. Сколько литров молока в каждом бидоне?

5. Найдите первый член и знаменатель возрастающей геометрической прогрессии, если сумма ее первых трех членов равна 21, а произведение этих же членов равно 64.

6. Упростите

$$\frac{a-1}{a^{3/4}+a^{1/2}}\cdot\frac{a^{1/2}+a^{1/4}}{a^{1/2}+1}\cdot a^{1/4}+1.$$

7. Решите уравнение:

а) $\log_2(2^x-7)=3-x$;

б) $\sqrt{4-6x-x^2}=x+4$;

в) $(4+2\sqrt{3})^{\frac{\cos x}{2}}=3$;

г) $5\sin 2x-2\sin x=0$;

д) $|x+3|-|x+1|=2$.

8. Решите неравенство:

$$\sqrt{-x^2+4x-3}<x-2.$$

9. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+2y+3z=8, \\ 3x+y+2z=7, \\ 2x+3y+z=9. \end{cases}$$

Вариант 2

1. Выведите формулу логарифма частного.

2. Дайте определение арифметической прогрессии.

3. Имеется два слитка золота с серебром. Процентное содержание золота в первом слитке в два с половиной раза больше, чем процентное содержание золота во втором слитке. Если сплавить оба слитка вместе, то получится слиток, в котором будет 40 % золота. Найдите, во сколько раз первый слиток тяжелее второго, если известно, что при сплавке равных по весу частей первого и второго слитков получается слиток, в котором содержится 35 % золота.

4. Сумма первых шести членов геометрической прогрессии со знаменателем 1/3 равна 364/9. Найдите первый и шестой члены прогрессии.

5. Две стороны треугольника равны a и b. Найдите третью сторону c треугольника, если его угол, лежащий против этой стороны, в два раза больше угла, лежащего против стороны b.

6. Упростите

$$\frac{(ab^{-1}+a^{-1}b+1)(a^{-1}-b^{-1})^2}{a^2b^{-2}+a^{-2}b^2-(ab^{-1}+a^{-1}b)}.$$

7. Вычислите:
а) $\sin^3\alpha-\cos^3\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=a$;
б) $\log_{12} 90$, если $\log_{24} 3=a$, $\log_{24} 5=b$.

8. Решите уравнение:
а) $\operatorname{ctg}^2 x=3$;
б) $\log_6(5+6^{-x})=x+1$.

9. Решите неравенство:

а) $|\log_3 x|<\left|\log_3 \frac{x}{9}\right|$;

б) $(x-1)\sqrt{-x^2+x+6}\geqslant 0$.

10. Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x+xy+y=11, \\ x-xy+y=1. \end{cases}$$

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Три звезды массой m каждая, удаленные от других небесных тел, сохраняют в своем движении конфигурацию равностороннего треугольника со стороной L. Найдите период вращения этого треугольника. Постоянная всемирного тяготения G известна.

2. Конец капиллярной трубки опущен в воду. Какое количество теплоты выделится при поднятии воды по капилляру? Плотность воды $\rho=1000$ кг/м^3, коэффициент поверхностного натяжения воды $\sigma=0{,}072$ Н/м, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. Две стороны правильного треугольника — однородно заряженные палочки. При этом в центре треугольника — в точке O — напряженность электрического поля равна $\vec{E}_0$. Каковы будут величина и направление напряженности поля в точке O, если одну из палочек убрать?

4. Длины сторон квадратного проводящего витка увеличиваются со скоростью $\Delta a/\Delta t=2$ см/с. Виток находится в однородном магнитном поле с индукцией, равной $B=1$ Тл и перпендикулярной плоскости витка. При $t=0$ стороны квадрата были равны $a=10$ см. Найдите ЭДС индукции в момент $T=2$ с.

5. Точечный источник света находится на главной оптической оси собирающей линзы с фокусным расстоянием $F=8$ см на расстоянии $d=12$ см от линзы. Линзу начинают смещать в направлении, перпендикулярном своей главной оптической оси, со скоростью $v_0=1$ см/с. С какой скоростью будет смещаться изображение источника, если сам источник остается неподвижным?

6. В микрокалориметр с теплоемкостью $C=1000$ Дж/К помещено $m=100$ мг изотопа кобальта (атомная масса $A=61$). При распаде одного ядра ^{61}Co выделяется энергия $Q=2\cdot10^{-19}$ Дж. Через время $\tau=50$ мин температура калориметра повысилась на $\Delta t=0{,}06$ К. Найдите период полураспада изотопа кобальта. Постоянная Авогадро $N_A=6\cdot10^{23}$ 1/моль.

Вариант 2

1. На тело массой m, вначале покоившееся на горизонтальной плоскости, в течение времени τ действует горизонтальная сила F. Какое расстояние пройдет тело за время движения? Коэффициент трения тела о плоскость μ, ускорение силы тяжести g.

2. В сосуд квадратного сечения, лежащий на горизонтальной поверхности и закрытый с одного конца, начинают медленно вдвигать поршень с открытого конца. Найдите давление воздуха в сосуде в тот момент, когда сосуд сдвинется с места. Масса сосуда вместе с поршнем $m=2$ кг, площадь поршня $S=6$ см^2, атмосферное давление $p_0=100$ кПа, коэф-

фициент трения между горизонтальной поверхностью и сосудом $\mu=0{,}3$, ускорение свободного падения $g=10$ м/с^2.

3. Напряжение на резисторе сопротивлением $R=100$ Ом меняется во времени по закону $U=k\sqrt{t}$, где $k=2$ (численно), если t измеряется в секундах, а напряжение в вольтах. Найдите количество теплоты, выделяющееся в резисторе за первые $\tau=100$ с.

4. По круговой орбите радиусом R вокруг протона вращается электрон. На сколько изменится частота обращения электрона по этой орбите, если систему поместить в слабое магнитное поле, индукция которого равна B и направлена вдоль оси вращения? Масса электрона m, заряд e.

5. Посередине плоского экрана находится точечный источник света. Параллельно экрану расположено плоское зеркало в форме равностороннего треугольника со стороной $a=20$ см. Центр зеркала находится напротив источника. Определите площадь светлого пятна, образованного на экране отраженными от зеркала лучами.

6. Азот облучался в течение $\tau=1$ ч пучком α-частиц (^4_2He), ускоренных в циклотроне. Найдите количество атомов образовавшегося изотопа $^{17}_8O$, если ток в пучке $I=200\cdot10^{-6}$ А и ядерную реакцию $^{14}_7N+^4_2He=^{17}_8O+^1_1H$ вызывает одна α-частица из каждых $n=10^5$ частиц в пучке.

Публикацию подготовили Г. Гайдуков, В. Плис, А. Ревякин, А. Терещенко

Московский энергетический институт

Математика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Упростите выражение для $f(x)$ и найдите $f'(4)$, $f'(7)$, если

$$f(x)=\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt[4]{(x-5)^2}+\sqrt{x^2+5x}+\sqrt[4]{(x^2-25)^2}}{\sqrt{x+\sqrt{4x+20}}+6}+\frac{\sqrt{x^3}+\sqrt{36x}}{6-x}\right)^2.$$

2. Решите уравнение

$$\log_2^4(0{,}5x)+\log_2^4(8x)=256.$$

3. Найдите двузначное число по следующим условиям: сумма цифр, изображающих это число, равна 14; цифра, изображающая единицы искомого числа, на 2 больше цифры, изображающей его десятки.

4. Найдите корни уравнения

$$3\cos(x-21\pi)-2\sin 2\left(x+\frac{19}{4}\pi\right)=\sin\frac{31}{2}\pi+\cos 27\pi,$$

принадлежащие области определения функции

$$y=\log_2(\sin x-\sqrt{7}/4).$$

5. Площадь основания правильной треугольной пирамиды равна S, высота пирамиды образует с боковым ребром пирамиды угол α. Найдите площадь поверхности сферы, диаметр которой равен высоте данной пирамиды.

Вариант 2

1. Упростите выражение

$$\left(\left(\frac{\sqrt[4]{a^5}+\sqrt[4]{a^2b^3}}{\sqrt[4]{a^3}+\sqrt[4]{a^2b}}-\sqrt[4]{ab}\right)\cdot 0{,}2^{\log_5|\sqrt[4]{a}-\sqrt[4]{b}|}-\sqrt[4]{a}\right)^4.$$

2. Решите неравенство

$$(5^{x^2}+3\cdot5^{-x^2})^{\log_5 x^2-0{,}25\log_5(x-2)^4}-1\geqslant0.$$

3. Две трубы, работая одновременно, заполняют бассейн за 4 ч 12 мин. Если бы производительность первой трубы увеличили вдвое, а вторую трубу включили через 10 мин после включения первой, то бассейн заполнился бы за 2 ч 30 мин. За какое время заполнит бассейн вторая труба?

4. Найдите корни уравнения

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\frac{4\pi}{3}\sin x+\cos x=\frac{3}{4},$$

лежащие на отрезке $[-\pi;\ 2\pi]$.

5. Площадь осевого сечения прямого кругового цилиндра равна S, а площадь полной поверхности равна Q. Найдите объем цилиндра.

Физика

Письменный экзамен

Вариант 1

1. Магнитное взаимодействие токов. Магнитное поле. Индукция магнитного поля. Сила, действующая на проводник с током в магнитном поле. Закон Ампера.

2. Как известно, заряженный шарик притягивает бумажку. Как изменится сила притяжения, если окружить металли-

ческой сферой а) заряженный шарик, б) бумажку?

3. Шарик массой m, движущийся со скоростью v, упруго ударяется о гладкую стенку под углом α к ее плоскости и отскакивает без потери скорости. Определите изменение импульса шарика.

4. Аквариум, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда, заполнен водой. С какой силой вода давит на стенку аквариума, если ее длина $l=0{,}8$ м, а высота $h=0{,}6$ м?

5. Сколько времени будет нагреваться $V=2$ л воды от $t_1=0\ ^\circ C$ до $t_2=100\ ^\circ C$ в электрическом чайнике мощностью $P=600$ Вт, если его коэффициент полезного действия $\eta=80\ \%$? Удельная теплоемкость воды $c=4{,}2$ кДж/(кг · К).

Вариант 2

1. Идеальный газ. Основное уравнение молекулярно-кинетической теории идеального газа. Температура и ее измерение. Абсолютная температурная шкала.

2. Вдоль оси вертикально стоящей катушки падает магнит. С одинаковыми ли ускорениями он движется при замкнутой и разомкнутой обмотке катушки?

3. При подключении к источнику тока с ЭДС $\mathcal{E}=15$ В резистора сопротивлением $R=15$ Ом мощность, выделяемая на нагрузке, составляет 75 % от полной мощности. Какую максимальную мощность во внешней цепи может выделить данный источник?

4. Тело начинает двигаться вдоль прямой без начальной скорости с постоянным ускорением. Через время $\tau=30$ мин ускорение тела меняет направление на противоположное, оставаясь таким же по величине. Через какое время от начала движения тело вернется в исходную точку?

5. На какую длину волны настроен колебательный контур, если он состоит из катушки индуктивностью $L=2\times10^{-3}$ Гн и плоского конденсатора? Расстояние между пластинами конденсатора $d=1$ мм, площадь пластин $S=80$ см^2, конденсатор заполнен диэлектриком с $\varepsilon=11$. Электрическая постоянная $\varepsilon_0=8{,}85\cdot10^{-12}$ Ф/м.

Публикацию подготовили
В. Прохоренко, А. Касаткин

Ответы, указания, решения

[redacted]ранные школьные [redacted]чи по физике

1. Согласно закону сохранения импульса,

$$m_1v_1=m_2v_2,$$

откуда находим отношение начальных скоростей тележек:

$$v_1/v_2=m_2/m_1=3.$$

Путь, пройденный каждой тележкой до остановки, пропорционален квадрату начальной скорости и обратно пропорционален ускорению (оно одинаково для обеих тележек). Поэтому отношение пройденных путей будет равно

$$\frac{l_1}{l_2}=\frac{v_1^2/a}{v_2^2/a}=\frac{v_1^2}{v_2^2}=9.$$

2. Пусть начальная скорость первого тела до удара равна v_1, а общая скорость обоих тел после удара — v. Согласно закону сохранения импульса,

$$m_1v_1=(m_1+m_2)v.$$

Кинетическая энергия системы до удара равна $m_1v_1^2/2$, а после удара — $(m_1+m_2)v^2/2$. Искомая доля потерянной кинетической энергии оказывается равной

$$\frac{m_1v_1^2/2-(m_1+m_2)v^2/2}{m_1v_1^2/2}=\frac{m_2}{m_1+m_2}.$$

3. Поскольку скорость первого шарика по модулю не изменилась, из закона сохранения энергии следует, что модуль скорости второго шарика остался прежним. Тогда из закона сохранения импульса получаем

$$m_1v_1-m_2v_2=-m_1v_1+m_2v_2,$$

и

$$v_2=m_1v_1/m_2=5\ \text{м/с}.$$

4. Работа, совершенная человеком, пошла на сообщение кинетической энергии $mv^2/2$ камню и кинетической энергии $MV^2/2$ человеку. Согласно закону сохранения импульса,

$$mv=MV.$$

Дальность полета камня —

$$l=vt,$$

высота полета —

$$H=gt^2/2.$$

Окончательно получаем

$$A=\frac{mv^2}{2}+\frac{MV^2}{2}=\frac{m(m+M)v^2}{2M}=\frac{m(m+M)gl^2}{4MH}\approx354\ \text{м}.$$

5. В момент отрыва (рис. 1) на тело действует только сила тяжести, проекция которой $mg\cos\alpha$ сообщает телу центростремительное ускорение $a=v^2/R$ (v — скорость тела в момент отрыва):

$$mg\cos\alpha=mv^2/R.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$mgH=mv^2/2+mgh.$$

Из рисунка 1

$$\cos\alpha=(h-R)/R.$$

Таким образом, искомая высота отрыва будет равна

$$h=(2H+R)/3.$$

6. При вращении круга возникает электрическое поле. Чтобы найти его напряженность, рассмотрим электрон, движущийся по окружности радиусом r $(0\leqslant r\leqslant R)$. Со стороны электрического поля на него действует сила eE, которая сообщает центростремительное ускорение ω^2r:

$$eE=m\omega^2r.$$

Отсюда получаем, что на расстоянии r от центра круга напряженность поля равна

$$E_r=m\omega^2r/e=\omega^2r/\gamma,$$

средняя напряженность —

$$E_{ср}=(E_0+E_R)/2=\omega^2R/(2\gamma),$$

а напряжение, измеряемое вольтметром,—

$$U=E_{ср}R=\omega^2R^2/(2\gamma).$$

7. На подвижный стержень действуют две горизонтальные силы: сила Ампера, вызывающая его движение, и сила трения, его тормозящая. Согласно второму закону Ньютона,

$$ma=F_A-F_{тр},$$

где

$$F_A=BIl,\ F_{тр}=\mu mg.$$

Отсюда получаем ускорение стержня:

$$a=BIl/m-\mu g=8\ \text{м/с}^2.$$

8. В состоянии равновесия сумма всех действующих на проводник сил (рис. 2) — силы тяжести mg, силы Ампера F_A и силы натяжения нитей $2T$ — равна нулю. Другими словами,

$$F_A=mg\operatorname{tg}\alpha,$$

где

$$F_A=BIl.$$

Таким образом, ток, текущий по проводнику, равен

$$I=mg\operatorname{tg}\alpha/(Bl)\approx2\ \text{А}.$$

9. Чтобы ион двигался равномерно и прямолинейно, магнитная и электрическая силы должны быть одинаковы по величине, но на-

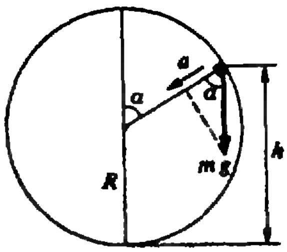


Рис. 1.

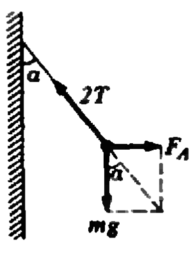


Рис. 2.

правлены в противоположные стороны:

$$\vec{F}_м=-\vec{F}_э, \text{ или } qvB=qE.$$

Согласно закону сохранения энергии,

$$mv^2/2=qU.$$

Тогда окончательно получаем

$$\frac{q}{m}=\frac{E^2}{2B^2U}\approx 10^5 \text{Кл/кг}.$$

10. Электрон влетает в магнитное поле со скоростью

$$v=\sqrt{2eU/m}.$$

Разложим вектор скорости электрона $\vec{v}$ на две составляющие: $\vec{v}_\parallel$ и $\vec{v}_\perp$ (рис. 3). Вдоль магнитного поля электрон движется равномерно и прямолинейно, а в перпендикулярном направлении он описывает окружность, т. е. траекторией электрона является винтовая линия. За время одного оборота T электрон по окружности пройдет путь $2\pi R=v_\perp T=v\sin\alpha\cdot T$, а вдоль поля он сдвинется на расстояние $h=v_\parallel T=v\cos\alpha\cdot T$.

Из второго закона Ньютона

$$\frac{mv_\perp^2}{R}=ev_\perp B.$$

Таким образом, шаг винтовой линии равен

$$h=\frac{2\pi\cos\alpha}{B}\sqrt{\frac{2mU}{e}}\approx 2{,}1\cdot 10^{-2}\text{м}.$$

11. Натяжение нити самое большое в крайнем нижнем положении. Из второго закона Ньютона

$$ma=T-mg, \qquad \text{где } a=\omega^2 l,$$

получаем искомую угловую скорость вращения:

$$\omega=\sqrt{(T-mg)/(ml)}\approx 5{,}5\text{с}^{-1}.$$

12. При полете предмета вверх сила тяжести совершает работу

$$A_1=-mgH'=-16\text{Дж},$$

при полете вниз —

$$A_2=mg(H'-H)=4\text{Дж},$$

а на всем пути —

$$A_3=A_1+A_2=-mgH=-12 \text{ Дж}.$$

13. Из первого закона термодинамики получаем

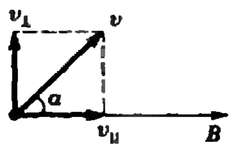


Рис. 3.

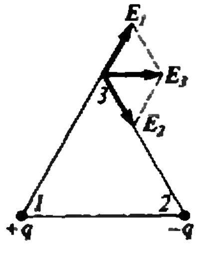


Рис. 4.

$$\Delta U=Q-A=Q-p\Delta V=2 \text{ МДж}.$$

Поскольку $\Delta U>0$, заключаем, что газ нагрелся.

14. Напряженность поля направлена параллельно той стороне треугольника, где находятся заряды (рис. 4), и равна

$$E_3=E_1=E_2=kq/a^2=q/(4\pi\varepsilon_0 a^2)=90\text{В/м}.$$

15. Согласно закону Ома,

$$I=\mathscr{E}/(R+r),$$

где

$$R=R_1R_2/(R_1+R_2)+R_3.$$

Таким образом, внутреннее сопротивление источника равно

$$r=\frac{\mathscr{E}}{I}-\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}-R_3=2 \text{ Ом},$$

а ток короткого замыкания —

$$I_{к.з.}=\mathscr{E}/r=5 \text{ А}.$$

[redacted]теж в стереометрических задачах

1. $\arccos(\cos\alpha\cos\beta)$.

2. $2\arcsin\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$.

3. $\arccos\frac{\sqrt{7}-1}{3}$.

4. $\arccos\frac{1}{6}$, $\sqrt{\frac{2}{35}}$.

5. $\arccos\frac{1}{3}$.

6. $60°$.

7. $\left|\frac{2\pi}{\sqrt{3}}\right|$.

8. $\frac{\pi\sqrt{2}(53-7\sqrt{3})}{48}$.

9. $\arcsin\left|\frac{1}{\sqrt{5}}\right|$, $\left|\frac{2}{\sqrt{5}}\right|$.

10. $\frac{1}{18}$.

[redacted]уравнения — к системе

1. а) $(a-1+\sqrt{1+2a})/2$, $a\geqslant 0$.

б) $\frac{1}{8}(p\pm\sqrt{8/p-p^2})^3-1$, $p\in(0;\ 2]$.

в) -7; 0; 2.

г) Неизвестные $u=\sqrt{a-x}$, $v=\sqrt{b-x}$, $w=\sqrt{c-x}$ удовлетворяют системе

$$x=a-u^2=b-v^2=c-w^2=uv+uw+vw.$$

Исключив x, получим систему

$$\begin{cases}(u+v)(u+w)=a,\\(u+v)(v+w)=b,\\(u+w)(v+w)=c.\end{cases}$$

Ответ: $\frac{a+b+c}{2}-\frac{a^2b^2+a^2c^2+b^2c^2}{4abc}$, причем

a, b, $c>0$ и среди чисел ab, ac, bc сумма двух любых больше третьего.

д) Неизвестные $u=\sqrt{4x^2+5x-1}$, $v=\sqrt{x^2-3x+3}$ связаны соотношением $u^2-4v^2=17x-13$. Возникает система

$$\begin{cases} 7u-14v=u^2-4v^2, \\ u^2-4v^2=17x-13. \end{cases}$$

Отсюда либо $u-2v=0$, либо $u+2v=7$. Первый вариант приводит к $x=13/17$. Второй вариант приводит к системе

$$\begin{cases} u+2v=7, \\ 7(u-2v)=17x-13 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 14u=17x+36, \\ 28v=62-17x. \end{cases}$$

Ответ: 13/17; 2; —746/495.

е) 1; —1/3; —4; 3/2.

ж) 2.

з) $(3-\sqrt{5})/2$.

и) —1; 0; 1.

к) $(-1\pm\sqrt{21})/2$; $(-3\pm\sqrt{17})/2$.

л) Если $a=0$, то $x=0$; если $a\geqslant 1$, то $x=\sqrt{a-\frac{3}{4}}-\frac{1}{2}$, при остальных значениях a решений нет.

м) Положите $x^2+1=y$. Ответ: 2; 1/2; $2\pm\sqrt{3}$.

н) Положите $x^2-8x+15=y$. Ответ: $7\pm\sqrt{34}$.

о) Положив $\sqrt{1-x^2}=y\geqslant 0$, получим симметрическую систему

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{35}{12},\ x^2+y^2=1.$$

Ответ: $(\sqrt{73}-5)/14$.

п) Переписав уравнение в виде $\frac{(x^2+2)^2-4x^2}{x^2+2}=5x$, положите $x^2+2=y$.

Ответ: $\frac{1}{4}\left(5+\sqrt{41}\pm\sqrt{34+10\sqrt{41}}\right)$.

р) Переписав уравнение в виде

$$\frac{1}{(1/x)^2}+\frac{1}{(1/5+1/x)^2}=11,$$

положите $u=1/x$, $v=1/5+1/x$.

Ответ: $(1\pm\sqrt{21})/2$.

2. а) Введя неизвестные $u=\sqrt{x-\frac{1}{x}}$, $v=\sqrt{1-\frac{1}{x}}$, решите соответствующее неравенству уравнение и воспользуйтесь методом интервалов.

Ответ: $((1+\sqrt{5})/2;\ +\infty)$.

б) $(-\infty;\ -2)\cup(-2;\ -\sqrt[4]{12}\,]\cup[\sqrt[4]{12};\ 2)\cup(2;\ +\infty)$.

3. а) Положив $\sqrt{-1-x}=a$, $\sqrt{2y-x}=b$, $\sqrt{1-2y}=c$, получим систему

$a-b=1$, $b+c=4$, $a^2-b^2-c^2=-2$.

Ответ: $(24\sqrt{3}-49;\ 2\sqrt{3}-6)$.

б) (2; 2).

[redacted]ковский государственный технический [redacted]ерситет им. Н. Э. Баумана

Математика

Вариант 1

1. 40. 2. $\pi(12k+5)/6$, $k\in Z$. 3. 1/3. 4. (1; 3/2).

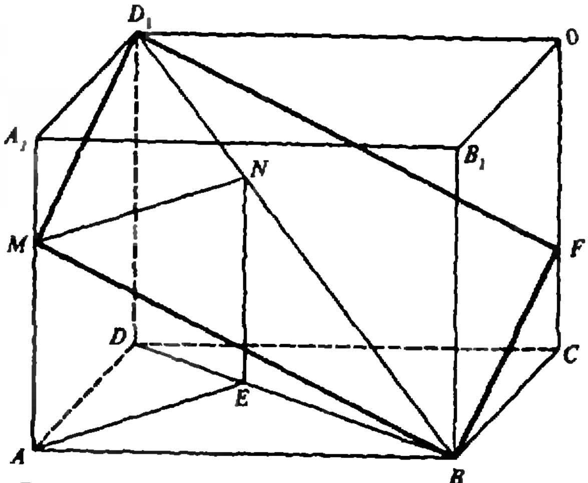


Рис. 5.

5. $a\in[-4/3;\ 0)\cup[3/4;\ +\infty)$. Указание. Левая часть второго уравнения раскладывается на множители $(y-x-a)(y+x+1/a)$. Поэтому данная система равносильна совокупности двух систем

$$\begin{cases} y=x+a, \\ y=x^2+1 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} y+x+1/a=0, \\ y=x^2+1. \end{cases}$$

6. $42/\sqrt{5}$; $\sqrt{229}/5$; $2\sqrt{241}/5$. Указание. Пусть точка M лежит на ребре AA_1 параллелепипеда, а MD_1PB — искомое сечение (рис. 5). Площадь сечения будет наименьшей, если будет наименьшей высота MN треугольника MD_1B, т. е. тогда, когда MN окажется общим перпендикуляром прямых AA_1 и BD_1. Для построения MN достаточно опустить из точки A перпендикуляр AE на BD, затем провести $EN\|D_1D$ и $MN\|AE$, после чего вычисления затруднений не вызывают.

Вариант 2

1. 45 км/ч, 54 км/ч.
2. $\pi(2k+1)/12$; $2\pi(3k\pm 1)/9$, $k\in Z$.
3. 3.
4. —1; 3. Указание. Пусть $x=c$ — абсцисса точки касания параболы $y=x^2+px+2$ с прямой $y=x+1$. Тогда

$$\begin{cases} 2c+p=1, \\ c^2+pc+2=c+1. \end{cases}$$

5. $a>3$. Указание. Исходная система имеет четыре различных решения, если уравнение $x^2-4(a-1)x+3a^2-4a+1=0$ имеет два различных положительных корня, т. е. при условии

$$\begin{cases} D/4=(a-1)(a-3)>0, \\ a-1>0, \\ 3a^2-4a+1>0. \end{cases}$$

6. 64/5. Указание. На расстоянии z от вершины пирамиды проведем плоскость, параллельную плоскости ее основания и, следовательно, пересекающую ее по ромбу $ABCD$, подобно-

му ромбу, лежащему в основании. Выясним, какой наибольший объем может иметь прямоугольный параллелепипед, вписанный в усеченную пирамиду. Для этого достаточно вписать в ромб $ABCD$ прямоугольник наибольшей возможной площади. Если на одной из сторон ромба лежат две вершины прямоугольника, (рис. 6), то наибольшую площадь имеет прямоугольник $AECF$. При этом если $BD=2b$, $AC=2a$, то $S_{AECF}=4ab^3/(a^2+b^2)$. Если же на всех четырех сторонах ромба имеется по одной вершине прямоугольника $MPNQ$, то центры ромба и прямоугольника совпадают (точка O), и причем либо стороны прямоугольника параллельны диагоналям ромба (рис. 7), либо нет (рис. 8). Во втором случае заметим, что углы MOP и AOE равны (убедитесь в этом). Пусть $\angle AOE=\alpha$, тогда площадь $MPNQ$ равна $2MO^2\sin\alpha$, а площадь $AECF$ равна $2b^2\sin\alpha$, но $b>MO$, и поэтому $S_{AECF}>S_{MPNQ}$.

Если же стороны параллельны диагоналям, причем $MP=2x$, то $S_{MPNQ}=S(x)=4\frac{b}{a}(ax-x^2)$, и при $x=a/2$ достигает максимума $S=ab$. Теперь сравним S_{AECF} и S:

$$ab-\frac{4ab^3}{a^2+b^2}=\frac{ab(a^2-3b^2)}{a^2+b^2}.$$

Эта разность положительна, если $a>b\sqrt{3}$, т. е. когда острый угол ромба меньше 60°, и отрицательна, если этот угол больше 60°. В нашем случае синус острого угла ромба равен $0{,}96>\sqrt{3}/2$, т. е. наибольшую площадь имеет прямоугольник $AECF$.

Пусть S_0 наибольшая площадь прямоугольника, вписанного в основание пирамиды. Тогда наибольшая площадь основания параллелепипеда с высотой $c-z$ равна $S_0\left(\frac{z}{c}\right)$ (c — высота пирамиды), а объем его равен $f(z)=S_0\left(\frac{z}{c}\right)(c-z)$. Функция $f(z)$ достигает максимума при $z=2c/3$.

Физика

1. $u_\perp=\sqrt{u(u-2v)}$ при $u\geqslant 2v$.
2. $F=m(g-v^2/(\sqrt{2}l))$.
3. $h\approx(v^2-mg^2/k)/(8g)$.
4. $A=mg(H+7/3h)$.
5. $\Delta U=3/2pV_1(V_1^2/V_2^2-1)$.
6. $A=1/2(p_1+p_2)(V_2-V_1)$.
7. $v=\sqrt{e^2/(2\pi\varepsilon_0 ma)}=225$ м/с.
8. $T=2\pi\sqrt{(m+B^2l^2C)/k}$.
9. Индукция магнитного поля должна быть перпендикулярной напряженности электрического поля конденсатора и равной $B=(U/d)\times\sqrt{m/(2qU_0)}$.
10. $\Delta\lambda=1{,}5\cdot10^{-5}$ см.

**[redacted]овский авиационный
ологический институт
им. К. Э. Циолковского**

Математика

Вариант 1

1. (3; 1). 2. $(0{,}1;1)\cup(10;100)$. 3. πn, $n\in Z$. 4. 4 км. 5. 25/3, 56/3.

Вариант 2

1. 5. 2. (1/2; 2). 3. $(-1)^{n+1}\pi/16+\pi n/4$, $n\in Z$. 4. 11. 5. 3; 4; 5.

Вариант 3

1. 1. 2. $(-5;-3)\cup(-1;1)$. 3. $\pi/2+\pi n$, $(-1)^n\pi/4-\pi n/4$, $-\pi/4+\pi n$, $n\in Z$. 4. 60 км/ч. 5. 186.

Физика

1. $L=2\sqrt{2gh(v^2-2gh)}/g\approx34$ м.
Указание. Мяч должен коснуться потолка.
2. $\mu=v/(gt)=0{,}4$; $l=vt/2=50$ м.
3. $S=(\rho_2-\rho_1)a^3/(\rho_2(a+h))=0{,}016$ м^2.
4. $p=R(\nu_1T_1+\nu_2T_2)/(V_1+V_2)=282{,}5$ кПа; $T=(\nu_1T_1+\nu_2T_2)/(\nu_1+\nu_2)=340$ К.
5. $m_в=mrT_1/(\lambda T_2)\approx5$ кг.
6. $v=\sqrt{v_0^2-2e\varphi/m}\approx1{,}2\cdot10^6$ м/с.
7. $I=(I_1U_2+I_2U_1)/(U_1-U_2)=80$ А.
8. $P=RCU_m^2/(2L)=5$ мВт.
9. $H=nh=4$ км.
10. $E_n=\frac{m_\alpha}{m_n+m_\alpha}\left(\Delta E+\frac{m_\alpha-m_D}{m_\alpha}E_D\right)\approx14{,}9$ МэВ.

Указание. Воспользуйтесь законами сохранения энергии и импульса

$$E_n+E_\alpha=E_D+\Delta E,$$
$$P_\alpha^2=P_D^2+P_n^2$$

и очевидным соотношением $P^2=2mE$.

**[redacted]овский институт
и и газа им. И. М. Губкина**

Математика

Вариант 1

1. 7. 2. 8. 3. 33. 4. 4. 5. 3. 6. −45. 7. 2. 8. 12. 9. 2. 10. 11,25. 11. 0,5. 12. 6.

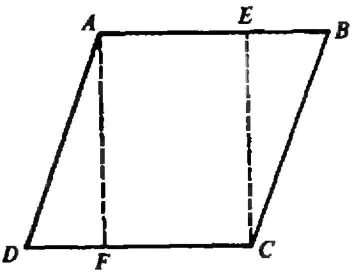


Рис. 6.

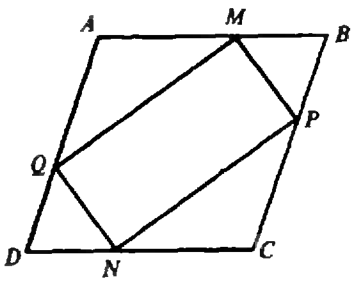


Рис. 7.

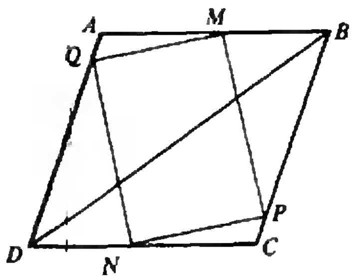


Рис. 8.

Вариант 2

1. 4. 2. —2. 3. 4. 4. —4. 5. 4. 6. 15. 7. 0,5. 8. 36. 9. —1,5. 10. 8. 11. —1. 12. 16.

Физика

Вариант 1

1. $t=2\sqrt{s/a}=60$ с.
2. $F_{\text{ср}}=m(v_1+v_2)/t=19$ Н.
3. $\alpha=\arccos\dfrac{3}{n+2}=60°$.
4. $n=(1+\sqrt{1-\alpha})/(1-\sqrt{1-\alpha})=3$.
5. $\rho=\alpha_1\rho_1+\alpha_2\rho_2=3{,}9$ г/см^3 $=3900$ кг/м^3.
6. $v=\sqrt{3pV/m}=700$ м/с.
7. $\Delta U=Q-1/2(p_1+p_2)(V_2-V_1)=300$ Дж.
8. $n=\alpha(\varepsilon-1)+1=3$.
9. $I=q/(t-t_1)=2$ А.
10. $E=\sqrt{(ma/q)^2-(Bv)^2}=8$ кВ/м.
11. $v=2\nu(x_2-x_1)=360$ м/с.
12. $F=2l_1(1-l_1/l)=9$ см.

Вариант 2

1. $n_2=1+(n_1-1)t_2/t_1=13$.
2. $v_2=v_1a_0/(a_0-a_1)=90$ км/ч.
3. $m=\Delta F/(4v\omega)=2500$ кг.
4. $\Delta F_{\max}=6mg=6$ Н.
5. $m=\dfrac{\rho_1(P_1\rho_0-(P_1-P_2)\rho_2)}{\rho_0(\rho_1-\rho_2)g}=965$ г.
6. $n=(\lg(p_0/p))/(\lg(\alpha+1))=3$.
7. $m=vFt\cdot 100\%/(\eta q)=18$ т.
8. $t=(n-1)^2C^2U^2R/Q=10$ с.
9. $P_{\max}=I_0^2IR/(4(I_0-I))=9$ Вт.
10. $m=kt(2I_1+I_2)/4=2{,}25$ г.
11. В два раза.
12. $n=\sqrt{1/(1-\alpha)}=3$.

Московский институт электронной техники

Математика

Вариант 1

3. $\sqrt{2}+\sqrt{6}$. 4. 40 л, 30 л. 5. 1; 4. 6. $\sqrt{a}$. 7. а) 3, б) —1, в) $\varnothing$, г) πn, $\pm\arccos 1/5+2\pi n$, $n\in Z$, д) $[-1;+\infty)$. 8. $(2+\sqrt{2}/2;\ 3]$. 9. (1; 2; 1).

Вариант 2

3. 2. 4. 27; 1/9. 5. $\sqrt{b(a+b)}$. 6. $1/ab$. 7. а) $a(3-a^2)/2$, б) $(5a+3b+1)/(a+2)$. 8. а) $\pi(6k\pm 1)/6$, $k\in Z$, б) 0. 9. а) (0; 3), б) $[-2]\cup[1;3]$. 10. (5; 1), (1; 5).

Физика

Вариант 1

1. $T=2\pi L\sqrt{L/(3Gm)}$.
2. $Q=2\pi\sigma^2/(\rho g)=3{,}25$ мкДж.
3. Вектор напряженности будет перпендикулярен оставшейся палочке, а величина напряженности останется прежней.
4. $\mathcal{E}=2B(a+T\Delta a/\Delta t)(\Delta a/\Delta t)=5{,}6$ мВ.
5. $v=v_0d/(d-F)=3$ см/с.
6. $T=-\tau/\log_2(1-AC\Delta t/(mN_AQ))=100$ мин.

Вариант 2

1. $l=F\tau^2(F/m-\mu g)/(2\mu mg)$.
2. $p=p_0+\mu mg/S=1{,}1\cdot 10^5$ Па.
3. $Q=(k\tau)^2/(2R)=200$ Дж.
4. $\Delta\nu=\pm eB/(4\pi m)$.
5. $S=2a^2\sin 60°\approx 690$ см^2.
6. $N=I\tau/(2en)=0{,}23\cdot 10^{14}$.

Московский энергетический институт

Математика

Вариант 1

1. $f(x)=|x-5|$, $x\geqslant 0$, $x\neq 6$; $f'(4)=-1$, $f'(7)=1$. 2. 1/8; 2. 3. 68. 4. $\pi(4n+1)/2$, $n\in Z$. 5. $\dfrac{4\pi S}{3\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2\alpha}$.

Вариант 2

1. b, $a>b\geqslant 0$. 2. $(-\infty;-2]\cup[1;2)\cup(2;+\infty)$. 3. 14 ч. 4. $-\pi/3$; $\pi/3$; $5\pi/3$. 5. $\dfrac{1}{4}S\sqrt{2\pi(Q-\pi S)}$.

Физика

Вариант 1

2. а) Электрическое поле за пределами сферы останется прежним, поэтому сила притяжения не изменится; б) электрического поля внутри сферы не будет, поэтому на бумажку со стороны заряженного шарика сила действовать не будет.
3. Изменение импульса направлено перпендикулярно стенке и равно $\Delta P=2mv\sin\alpha$.
4. $F=\rho gh^2l/2=1{,}4\cdot 10^3$ Н (здесь $\rho=10^3$ кг/м^3 — плотность воды).
5. $\tau=\rho Vc(t_2-t_1)/(P\eta)=1{,}75\cdot 10^3$ с $=29$ мин.

Вариант 2

2. При разомкнутой обмотке катушки магнит падает с ускорением свободного падения, а при замкнутой обмотке, из-за явления электромагнитной индукции, — с меньшим ускорением.
3. $P_{\max}=3\mathcal{E}^2/(4R)=11{,}25$ Вт.
4. $t=(2+\sqrt{2})\tau=102$ мин.
5. $\lambda=2\pi c\sqrt{\varepsilon_0\varepsilon SL/d}\approx 2{,}3\cdot 10^5$ м (здесь $c=3\cdot 10^8$ м/с — скорость света).

«Квант» для младших школьников

(см. «Квант» № 4)

1. Обозначим количество пойманных мышей каждым котом начальной буквой его имени. Тогда условия задачи запишутся так: Л+П=В+Б, В>Б, В+Л<П+Б, П=3. Отсюда нетрудно вывести, что П>В>Б>Л. Но так как П=3, то В=2, Б=1, Л=0.
2. 32467+32467=64934.
3. Рассмотрим треугольник ACM, где M — основание перпендикуляра, опущенного из точки C на основание AD данной трапеции $ABCD$ (рис. 9). Его высота равна высоте трапеции, а основание AM — длине ее средней линии. Поэтому площадь этого треугольника, как и площадь треугольника BDN, равняется полови-

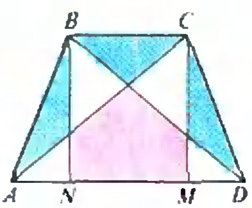


Рис. 9.

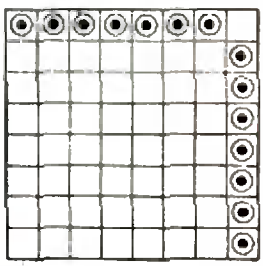


Рис. 10.

не площади трапеции. Отсюда следует, что площадь общей части этих треугольников (красный пятиугольник) равняется сумме площадей, непокрытых ими в трапеции (синие треугольники).

4. 169, 196, 961.

5. Если среди 15 фигур найдется фигура такая, что и в горизонтальном ряду клеток и в вертикальном ряду клеток, в которых она стоит, есть еще хотя бы по одной фигуре, то эту фигуру можно убрать. Тогда оставшиеся 14 фигур будут удовлетворять нужному требованию. Допустим, что такая фигура не найдется. Тогда для каждой из 15 фигур можно указать либо горизонтальный, либо вертикальный ряд, в котором она стоит в одиночестве. Это означает, что в сумме найдутся 15 горизонтальных и вертикальных рядов, в каждом из которых стоит по одной фигуре. Но так как всего таких рядов 16, то либо все горизонтальные, либо все вертикальные ряды таковы, что в них стоит по одной фигуре. Это значит, что на доске стоит только 8 фигур — противоречие с условием задачи. Итак, фигура, которую можно убрать, найдется.

На рисунке 10 показано расположение 14 фигур, доказывающее, что в условии задачи число 15 нельзя заменить на 14.

Калейдоскоп «Кванта»
(см. «Квант» № 4)

Вопросы и задачи

1. В электростатическую энергию системы «тело — электроны» и в кинетическую энергию электронов.
2. Металлическая пластинка зарядится отрицательно, полупроводниковая — останется нейтральной.
3. На фотопленке — она чувствительна и к длинноволновым излучениям.
4. Можно — в ультрафиолетовых или инфракрасных лучах.
5. На белую — в 2 раза больше, чем на черную.
6. Да. Например, луч достаточно мощного лазера удерживает во взвешенном состоянии мелкие прозрачные стеклянные шарики.
7. От заходящего Солнца.
8. Если скорости электрона и позитрона равны по величине и противоположно направлены.
9. Да, но только в присутствии какой-либо частицы, которая «примет на себя» его импульс.
10. Нет, так как в этом случае не могут одновременно выполняться закон сохранения импульса и закон сохранения энергии.
11. Частоту либо длину волны излучения.
12. Фотон.

Микроопыт

Можно, если осветить пластину и поднести к ней стеклянную палочку, натертую бумагой.

4-я с. обложки
(см. «Квант» № 4)

Фигура а) является объединением половинок 1 и 2 (нумерацию половинок см. на обложке «Кванта» № 3), б) 4 и 6, в) 1 и 4, г) 4 и 7, д) 4 и 8, е) 4 и 10, ж) 8 и 10, з) 10 и 11, и) 5, 7 и 9, к) 5, 8 и 10, л) 4, 8 и 11, м) 4, 5 и 7.

Конкурс «Математика 6—8»
(см. «Квант» № 2)

16. Заполним треугольную таблицу следующим образом: в каждую клетку поставим число способов прийти в эту клетку от начала — буквы *М* (рис. 11). Сумма чисел в правом столбце равняется количеству способов прочесть слово *маршрут*: $51+76+69+44+20+6+1=267$. Заполним теперь ту же таблицу, поставив в клетке количество способов, которыми можно из этой клетки дойти до конца слова (рис. 12). Теперь заметим, что если к букве можно прийти n способами, а из нее можно дойти до конца m способами, то, изымая эту клетку, мы уменьшаем количество способов на nm. Заполним третью таблицу, поставив в каждую клетку произведение чисел в этой клетке в первой и второй таблицах (рис. 13). Чтобы получить 145 способов, следует изъять клетку с числом 122.

17. Чтобы вспахать поле, одному трактору требуется $300:15=20$ дней. Если работает несколько тракторов, то количество дней работы равно одному из делителей числа 20, т. е. 20, 10, 5, 4, 2 или 1. Разность, равная 6, получается лишь для чисел 10 и 4, поэтому в первом случае 2 трактора работали 10 дней, а во

1	1	2	4	9	21	51
	1	2	5	12	30	76
		1	3	9	25	69
			1	4	14	44
				1	5	20
					1	6
						1

Рис. 11.

267	96	35	13	5	2	1
	171	61	22	8	3	1
		75	26	9	3	1
			27	9	3	1
				9	3	1
					3	1
						1

Рис. 12.

267	96	70	52	45	42	51
	171	122	110	96	90	76
		75	78	81	75	69
			27	36	42	44
				9	15	20
					3	6
						1

Рис. 13.

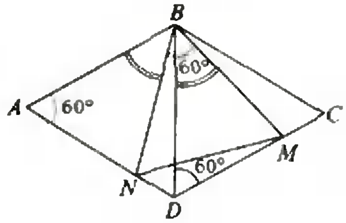


Рис. 14.

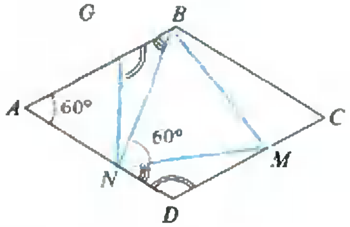


Рис. 15.

втором — 5 тракторов 4 дня. Дополнительное количество тракторов — 3.

18. Если $\angle MBN=60^\circ$ (рис. 14), то треугольник ABN равен треугольнику DBN, так как $AB=BD$, $\angle BAN=\angle BDM=60^\circ$, а углы ABN и DBM равны как дополняющие до 60° угол NBD. Поэтому $BN=BM$ и треугольник BMN — равносторонний.

Пусть теперь $\angle BNM=60^\circ$. Отложим на стороне AB отрезок $AG=AN$ (рис. 15) и докажем, что треугольники GBN и DNM равны. В самом деле, $BG=DN$, $\angle BGN=\angle NDM=120^\circ$, а равенство углов GBN и MND следует из равенств

$$\angle BND=\angle BAN+\angle GBN=\angle BNM+\angle NMD,$$
$$\angle BAN=\angle BNM=60^\circ.$$

Итак, $BN=NM$, что и требовалось.

Квант

Главный редактор —
академик Ю. Осипьян

Первый заместитель главного редактора —
академик С. Новиков

Заместители главного редактора:
В. Боровишки, А. Варламов, Ю. Соловьев

Номер подготовили:
А. Виленкин, Л. Винюкова, А. Егоров, Л. Кардасевич, А. Савин, В. Тихомирова, А. Черноуцан

Номер оформили:
Д. Крымов, Н. Кузьмина, С. Лухин, Э. Назаров, П. Черуский, В. Юдин

Редактор отдела художественного оформления С. Иванов

Художественный редактор Т. Макарова

Зав. редакцией С. Давыдова

Корректор М. Дронова

103006, Москва К-6, ул. Горького, 32/1, «Квант», тел. 250-33-54

Сдано в набор 22.02.91. Подписано к печати 8.04.91. Формат 70×100/16. Бумага № 1. Гарнитура школьная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 6,45. Усл. кр.-отт. 27,09. Уч.-изд. л. 7,97. Тираж 94 775 экз. Заказ 319. Цена 70 коп.

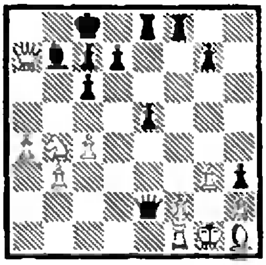
Ордена Трудового Красного Знамени
Чеховский полиграфический комбинат
Государственного комитета СССР
по печати
142300, г. Чехов Московской области

Шахматная страничка

СИЛА И БЕССИЛИЕ КОМПЬЮТЕРА

Шахматные компьютеры все активнее внедряются в жизнь мастеров и гроссмейстеров, можно сказать, затрагивают их профессиональные интересы. Вот и в репортажах с очередного, пятого по счету, матча на первенство мира между Г. Каспаровым и А. Карповым постоянно сообщалось об участии машин в анализе позиций, возникающих в ходе игры.

Компьютеры, которым предлагалось оценить различные острые положения из партий, часто «спорили» с чемпионом мира и экс-чемпионом, иногда соглашались с участниками матча, а иногда предлагали свои собственные оригинальные решения...



Г. Каспаров — А. Карпов

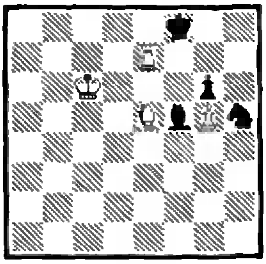
Эта позиция возникла в 14-й партии матча после 25-го хода белых. Хотя у черных лишнее качество, положение их вызывает серьезные опасения — грозит и марш пешки «a», и страшное Kb4 — a6. Для защиты от этих угроз в пресс-центре матча многие аналитики предлагали 25... Kpd8, чтобы на 26. Ф:b7 воспользоваться уходом ферзя с важной диагонали и объявить вечный шах — 26...Л:f2 27. Л:f2 Фe1+ 28. Лf1 Фe3+ 29. Лf2 Фe1+ и т. д.

Однако белые красиво опровергали эту комбинацию — после 26...Л:f2 в их распоряжении есть страшный промежуточный удар — 27. Фb8+! Kpe7 28. K:c6+!! Вертикаль «f» недоступна для черного короля из-за Л:f2+, и поэтому все кончено: 28... dc (28...Kpe6 29. Cd5+ Kpd6 30. Фb4×) 29. Ф:c7+Kpe6 30. Ф:c6+ Kpe7 31. Фc7+ Kpe6 32. Фb6+ и 33. Ф:f2.

Получается, что вечного шаха нет? Окончательный диагноз поставил микрочемпион «Мефисто». Он обнаружил, что эффектный промежуточный ход имеется не только у белых, но и у черных. В позиции на диаграмме они могут сыграть 25...Лf3!! и только в ответ на 26. Ka6 (на 26. a5 следует простое 26...Л:b3, в случае 26. C:f3 Фf3 черные ставят мат) — 26...Kpd8! Теперь вечный шах неизбежен — 27. Ф:b7 Л:f2! Белый конь удалился от поля c6, и знакомая операция стала возможной: 28. Л:f2 Фe1+ и т. д.

Заметим, что партия все-таки закончилась вничью, но при этом Карпову пришлось пережить немало неприятных минут.

В данном примере позиция была насыщена тактическими нюансами, причем перебор вариантов требовался на относительно небольшое число ходов. В такой ситуации современная ЭВМ чувствует себя как рыба в воде. Совсем другое дело, когда задача состоит не в отыскании одного-двух точных ходов, а в определении плана игры и лишь затем вариантов, реализующих его.



Г. Каспаров — А. Карпов

В этом положении на 88-м ходу вторично была отложена 16-я партия матча. Напомним, что по дебюту у Карпова было очень плохо, затем 60 ходов он упорно защищался и вот уже почти построил неприступную крепость... Есть ли у белых путь к победе? — этот вопрос интересовал всех. Самые мощные компьютерные программы, в том числе чемпион мира «Дип сот», анализировали это окончание (как перед доигрыванием партии, так и еще долго после него), но так и не смогли найти выигрыш за белых. Таким образом, слухи о том, что в этой партии Г. Каспарову помог компьютер, не оправдались. Чемпион мира вместе со своими помощниками наметили четкий стратегический план победы, математически точно доказав, что белые выигрывают максимум в 18 ходов.

В этом окончании важно найти заключительное положение цугцванга для черных, а соответствующие варианты уже дело второе. В позиции отсутствуют комбинационные мотивы, и отдельные ходы приобретают смысл только во всей цепочке, ведущей к цели. Короче говоря, правильность ходов определяется конечной целью — приближают ли они нас к финальной критической позиции или нет. Поскольку машина анализирует эндшпиль методом перебора (разумеется, речь идет об игровой программе, а не специальной, составленной для определенного вида эндшпиля), справиться с заданием не представляется возможным даже современным быстродействующим ЭВМ.

Осталось привести ходы, указанные сильнейшими компьютерами мира.

89. Лa7 Ce4+ 90. Kpc5 Cg2 91. Kpd4 Cf3 92. Kpe3 Cd5 93. Kpf2 Ce4 94. Лd7 Cf5 95. Лc7 Ce4 96. Лc4 Cd5 97. Лd4 Ch1 98. Лd6 Kpf7 99. Kpe3 Cg2 100. Cd4 Ca8 101. Cb2 Cg2 102. Cc3 Ca8 103. Cd4 Cg2 104. Ce5 Ch1 105. Лb6 Cg2 106. Ca1 Cd5 107. Cc3 Cg2 108. Лa6 Cf1 109. Лd6. Любопытно, что от начала до конца оценка оставалась постоянной: +1,66 пешки в пользу белых. Машина пробовала и так, и сяк, но при отсутствии плана все попытки были безуспешны.

«Дип сот» увидел выигрыш за белых только после введения в машину первых шести ходов Каспарова. Так что до чемпиона мира шахматным компьютерам пока еще далеко.

Е. Гик

70 коп.
Индекс 70465

С давних времен в Китае распространена игра «танграм»: квадрат разрезан на 7 частей (рис. 1) и из этих кусочков складываются различные фигурки. Об этой игре рассказывалось в № 7 за 1987 год в статье А. Савина «Задачи на разрезание», а также на 4-й странице обложки № 5 за 1989 год.

Существует много разновидностей разрезания квадрата для этих целей. Одна из таких игр — «пифагор» — продается в магазинах игрушек. В ней квадрат разбит на 7 частей, но уже другим образом (рис. 2). В статье А. Панова «Загадка фигуры № 51» («Квант» № 12 за 1982 год) содержится целое исследование о фигурах, которые можно сложить из элементов танграма или пифагора. Наш читатель Сун Вей-цы из Китая прислал еще один вид танграма (рис. 3), в котором квадрат разрезан лишь на 5 частей. Он предлагает из этих кусочков составить шесть фигурок (рис. 4). Ответы вы найдете в следующем номере.

А. П.

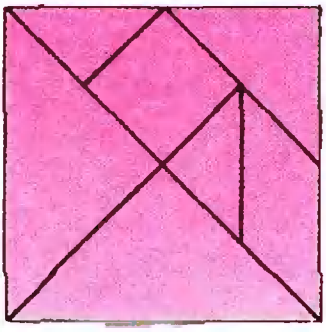


Рис. 1.

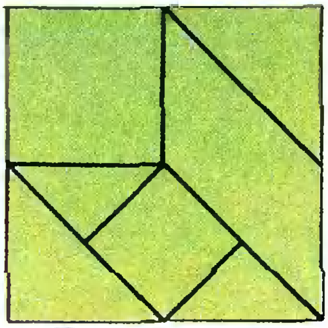


Рис. 2.

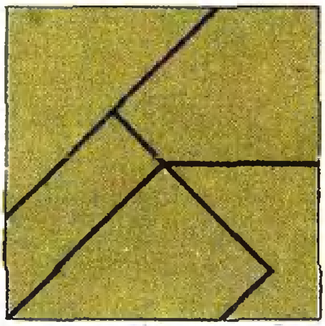


Рис. 3.

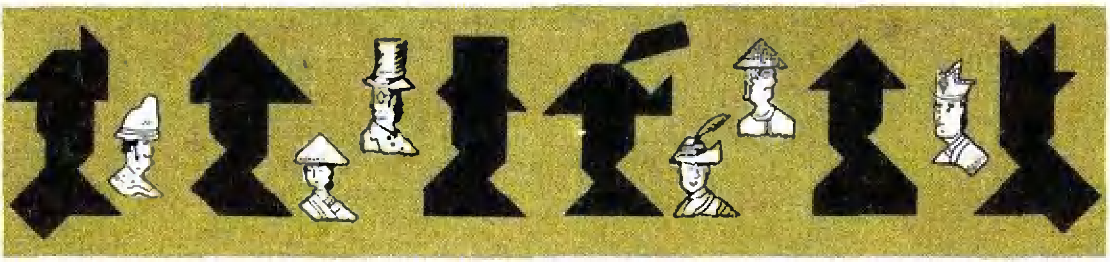


Рис. 4.